المعادلات التفاضليّة

الجزء الثاني

تأليف

الأستاذ الدكتور

حسن مصطفى العويضي

أستاذ الرياضيات بجامعة الأزهر

كلية التربية للبنات - الرياض

الدكتور

عبد الوهاب عباس رجب

أستاذ الرياضيات بجامعة الأزهر

كلية التربية للبنات - الرياض

الدكتورة

سناء علي زارع

رئيسة قسم الرياضيات

كلية التربية للبنات - الرياض

مكتبة الرشد

ناشرون

المحتويات

المقدمة

ما زالت المعادلات التفاضلية منذ عهد نيوتن تستخدم في فهم العلوم الفيزيائية والهندسية والحيوية بالإضافة إلى مساهمتها في دراسة التحليل الرياضي وامتدت استخداماتها في العلوم الاقتصادية والاجتماعية . وتطورت المعادلات التفاضلية وتزايدت أهميتها في جميع مجالات العلوم وتطبيقاتها .

وقد راعينا عند إعداد هذا الكتاب أن نقلل من البراهين النظرية والإكثار من الأمثلة دون الإخلال بالدقة العلمية حتى تكون المادة العلمية سهلة المأخذ .

فقد تعرضنا لدراسة وجود الحلول ووحدويتها وإيجاد حلول الأنظمة الخطية ثم أتبعنا بدراسة المعادلات التفاضلية ذات معاملات متغيرة مستخدمين عدة طرائق . هذا بالإضافة إلى دراسة خواص دوال بسل ولبحندر . والحقنا بذلك دراسة مبسطة عن المعاملات التفاضلية الجزئية وأنهيا الكتاب بطريقة حل المعادلات التفاضلية الخطية مستخدما طريقة فروبنيوس .

الباب الأول

نظرية الوجود والوحدوية

Existence and Uniqueness Theorem

الباب الأول

نظرية الوجود و الوحدوية

Existence and Uniqueness Theorem

1- مقدمة

قد تقابلنا فى المسائل الهندسية و الفيزيائية بعض المعادلات التفاضلية غير الخطية التى يتعذر حلها بالطرق المعروفة و لذلك نلجأ لمعرفة وجود الحل من عدمه أو وجود أكثر من حل للمعادلة التفاضلية دون إيجاد الحل نفسه. وقد نلجأ أيضا للطرق العددية للحصول على حل تقريبى لهذه المعادلات.

وفى هذا الباب سوف نناقش طريقة بيكارد (Picard) للتقريب المتتالى لإيجاد حل تقريبى لمسألة القيم الإبتدائية

$$\frac{dy}{dx} = f(x,y), \qquad y(x_0) = y_0$$

يسمى الشرط $y(x_0) = y_0$ بالشرط الإبتدائي. وترمز $y(x_0) = y_0$ إلى قيمة y عند $x = x_0$

٢ - طريقه بيكارد للتقريب المتتالى Picard's approximation method

ليكن لدينامسألة القيمه الإبتدائية

$$\frac{dy}{dx} = f(x,y), \qquad y(x_0) = y_0 \qquad (1)$$

و بتكامل (1) على الفترة (x_0, x) نحصل على

$$\int_{y_0}^{y} dy = \int_{x_0}^{x} f(s,y)ds$$

أى

$$y(x) - y_0 = \int_{x_0}^{x} f(s,y)ds$$

أى أن

$$y(x)=y_0+\int_{x_0}^{x} f(s,y)ds \qquad (2)$$

وبالتالى فإن حل مسألة القيمه الإبتدائية (1) يكون مكافئاالإيجاد دالة $y(x)$ التى تحقق المعادلة (2) لأنه بتفاضل (2) نحصل على $\frac{dy}{dx}=f(x,y)$ وبوضع $x=x_0$ فى(2) نحصل على $y(x_0)=y_0+0$ أى $y(x_0)=y_0$. وعلى العكس فقد حصلنا على(2) من (1) بالتكامل على الفترة (x_0,x) ومستخدما الشرط الإبتدائى $y(x_0)=y_0$ وهذا يقودنا إلى النظرية التالية:

نظرية(١):

أى حل لمسألة القيمة الابتدائية (1) يكون حلا للمعادلة التكاملية (2) وعلى العكس أى حل يحقق المعادلة التكامليه (2) يكون حلا لمسألة القيمة الابتدائية (1).

وحيث إن التكامل فى الطرف الأيمن من (2) لايمكن الحصول عليه لغياب أى معلومات عن y بدلالة x. وعلى ذلك سوف نلجأ إلى تقريب متتالى لحل المعادلة التكاملية (2) كما يلى.

كتقريب أولى نضع $y=y_0$ فى الدالة المكاملة فى (2) فنحصل على

$$y_1(x)=y_0+\int_{x_0}^{x} f(s,y_0)ds \qquad (3)$$

حيث $y_1(x)$ هى قيمة $y(x)$ المناظرة وتسمى بالتقريب الأول وهى تقريب أفضل للحل $y(x)$ عند أى x. وللحصول على تقريب أكثر دقه نعوض عن y بالحل بالتقريب الأول y_1 فى الطرف الأيمن من (2) لنحصل على مايسمى بالتقريب الثانى y_2

$$y_2(x)=y_0+\int_{x_0}^{x} f(s,y_1(s))ds \qquad (4)$$

ونستمر فى هذه الطريقه حتى الحصول على التقريب النونى y_n وهو

$$y_n(x) = y_0 + \int_{x_0}^{x} f(s, y_{n-1}(s))ds$$

وبذلك نحصل على متتابعه من الحلول التقريبيه

$$y_1(x), y_2(x), y_3(x), \dots, y_n(x), \dots$$

مثال (١)

استخدم طريقه بيكارد لحل مسألة القيمه الإبتدائية

$$\frac{dy}{dx} = 2y - 2x^2 - 3, \qquad y(0) = 2 \qquad (1)$$

الحل

لدينا مسألة القيمه الإبتدائية

$$y' = 2y - 2x^2 - 3, \quad y = 2,\ x = 0 \qquad (2)$$

ونعرف أن التقريب النونى لحل مسألة القيمة الإبتدائية هو

$$y_n = y_0 + \int_{x_0}^{x} f(s, y_{n-1}(s))ds \qquad (3)$$

وحيث إن

$$f(x, y) = 2y - 2x^2 - 3, \qquad x_0 = 0, y_0 = 2 \qquad (4)$$

ومن (3) نحصل على

$$y_n = 2 + \int_0^x (2y_{n-1} - 2s^2 - 3)ds \qquad (5)$$

<u>التقريب الأول</u>: بوضع n=1 فى (5) نحصل على

$$y_1 = 2 + \int_0^x (2y_0 - 2s^2 - 3)ds$$

$$= 2 + \int_0^x (4 - 2s^2 - 3)ds$$

$$= 2 + \int_0^x (1 - 2s^2)ds$$

$$= 2 + [s - \frac{2s^3}{3}]_0^x = 2 + x - \frac{2x^3}{3} \qquad (6)$$

<u>التقريب الثانى</u>: بوضع n=2 فى (5) نحصل على

$$y_2 = 2 + \int_0^x (2y_1 - 2s^2 - 3)ds$$

$$= 2 + \int_0^x [2\{2 + s - \frac{2s^3}{3}\} - 2s^2 - 3]ds$$

$$= 2 + \int_0^x [1 + 2s - 2s^2 - \frac{4s^3}{3}]ds$$

$$= 2 + x + x^2 - \frac{2x^3}{3} - \frac{x^4}{3} \qquad (7)$$

التقريب الثالث:

بوضع n=3 فى (5) نحصل على

$$y_3 = 2 + \int_0^x (2y_2 - 2s^2 - 3)ds = 2 + \int_0^x [2\{2 + s + s^2 - \frac{2s^3}{3} - \frac{s^4}{3}\} - 2s^2 - 3]ds$$

$$= 2 + \int_0^x [1 + 2s - \frac{4s^3}{3} - \frac{2}{3}s^4]ds$$

$$= 2 + x + x^2 - \frac{x^4}{3} - \frac{x^5}{10}$$

مثال (٢)

استخدم طريقة بيكارد للتقريب المتتالى لإيجاد التقريب الثالث لحل المسألة الابتدائية .

$$\frac{dy}{dx} = x + y^2, y(0) = 0$$

الحل :

لدينا

$$\frac{dy}{dx} = x + y^2, y(0) = 0 \qquad (1)$$

ونعرف أن التقريب النونى لمسألة القيمه الإبتدائية

$$\frac{dy}{dx} = f(x, y), y(x_0) = y_0 \qquad (2)$$

يعطى بالعلاقة

$$y_n = y_0 + \int_{x_0}^{x} f(s, y_{n-1}(s))ds \qquad (3)$$

بالمقارنة من (1) ، (2) نجد أن

$$f(x, y) = x + y^2, x_0 = 0, y_0 = 0 \qquad (4)$$

ومن المعادلة (3) فإن

$$y_n = \int_0^x [s + y_{n-1}^2(s)]ds \qquad (5)$$

التقريب الأول: بوضع $n=1$ فى (5) نحصل على

$$y_1 = \int_0^x [s + y_0^2]ds = \int_0^x sds = \frac{1}{2}x^2 \qquad (6)$$

التقريب الثانى: بوضع $n=2$ فى (5) ونستخدم (6) فنحصل على

$$y_2 = \int_0^x [s + y_1^2]ds = \int_0^x [s + \frac{s^4}{4}]ds = \frac{1}{2}x^2 + \frac{1}{20}x^5 \qquad (7)$$

التقريب الثالث: بوضع n=3 فى ونستخدم (7) نحصل على

$$y_3 = \int_{x_0}^{x}[s + y_2^2]ds$$

$$= \int_0^x \left[s + (\frac{1}{2}s^2 + \frac{1}{20}s^5)^2 \right] ds = \int_0^x [s + \frac{s^4}{4} + \frac{s^{10}}{400} + \frac{1}{20}s^7]ds$$

$$= \frac{1}{2}x^2 + \frac{1}{20}x^5 + \frac{1}{4400}x^{11} + \frac{1}{160}x^8$$

مثال (٣)

أوجد التقريب الثالث لحل المعادلة التفاضليه

$$\frac{dy}{dx} = 2 - (\frac{y}{x}) \qquad (1)$$

باستخدام طريقة بيكارد حيث $y(1) = 2$

الحل :

نعرف أن التقريب النونى y_n لمسألة القيمة الإبتدائية

$$\frac{dy}{dx} = f(x, y), y(x_0) = y_0 \qquad (2)$$

يعطى بالعلاقة

$$y_n = y_0 + \int_{x_0}^{x} f(s, y_{n-1}(s))ds \qquad (3)$$

بمقارنة من (1) ، (2) نجد أن

$$x_0 = 1, y_0 = 2, f(x, y) = 2 - (\frac{y}{x}) \qquad (4)$$

من (3) نحصل على

$$y_n = 2 + \int_1^x [2 - \frac{1}{x} y_{n-1}]ds \qquad (5)$$

<u>التقريب الأول</u>: بوضع n=1 فى (5) نحصل على

$$y_1 = 2 + \int_1^x [2 - (\frac{1}{s}) y_0]ds = 2 + \int_1^x [2 - (\frac{2}{s})]ds \qquad (6)$$

$$= 2 + [2 - 2\ln s]_1^x = 2 + 2x - 2\ln x - 2 = 2x - 2\ln x$$

<u>التقريب الثانى</u>: بوضع n=2 فى (5) وباستخدام (6) نحصل على

$$y_2 = 2 + \int_1^x [2 - \frac{y_1}{s}]ds = 2 + \int_1^x [2 - \frac{1}{s}(2s - 2\ln s)]ds$$

$$= 2 + 2\int_1^x \ln s . \frac{1}{s} ds = [2 + (\ln s)^2]_1^x = 2 + \ln^2 x \qquad (7)$$

<u>التقريب الثالث</u>: بوضع n=3 فى (5) وباستخدام (7) نحصل على

$$y_3 = 2 + \int_1^x \left[2 - \frac{1}{s} y_2 \right] ds$$

$$= 2 + \int_1^x [2 - \frac{1}{s}\{2 + \ln^2 s\}]ds = 2 + 2x - 2\ln x - (1/3)\ln^3 x - 2$$

$$= 2x - 2\ln x - \frac{1}{3}\ln^3 x.$$

مثال (٤)

إستخدم طريقه بيكارد لإيجاد حل مسألة القيمه الإبتدائية

$$\frac{dy}{dx} = y - x, y(0) = 2$$

وأثبت أن الحل التقريبى يقترب من الحل التام(exact)

الحل

لدينا

$$\frac{dy}{dx}=y-x, y(0)=2 \tag{1}$$

ونعرف أن التقريب النونى لمسألة القيمه الإبتدائية

$$\frac{dy}{dx}=f(x,y), y(x_0)=y_0 \tag{2}$$

يعطى بالعلاقة

$$y_n=y_0+\int_{x_0}^{x} f(s,y_{n-1}(s))ds \tag{3}$$

بمقارنة (1) ، (2) نجد أن

$$f(x,y)=y-x, x_0=0, y_0=2 \tag{4}$$

و من (3) نجد أن

$$y_n=2+\int_0^x [y_{n-1}-s]ds \tag{5}$$

<u>التقريب الأول</u>: بوضع n=1 فى (5) وإستخدام (4) نحصل على

$$y_1=2+\int_0^x [y_0-s]ds=2+\int_0^x [2-s]ds=2+2x-\frac{1}{2}x^2 \tag{6}$$

<u>التقريب الثانى</u>: بوضع n=2 فى (5) وبإستخدام (6) نحصل على

$$y_2=2+\int_0^x [y_1-s]ds=2+\int_0^x [2+2s-\frac{1}{2}s^2-s]ds=2+2x-\frac{1}{2}x^2-\frac{1}{6}x^3 \tag{7}$$

<u>التقريب الثالث</u>: بوضع n=3 فى (5) وبإستخدام (7) نحصل على

$$y_3 = 2 + \int_0^x [y_2 - s]ds = 2 + \int_0^x [2 + 2s + \frac{1}{2}s^2 - \frac{1}{6}s^3 - s]ds$$

$$= 2 + 2x + \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{6} - \frac{x^4}{24} = 1 + x + 1 + \frac{x}{1!} + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^3}{3!} - \frac{x^4}{4!} \quad (8)$$

للحصول على الحل التام للمعادلة (1) حيث

$$\frac{dy}{dx} - y = -x \quad (9)$$

وهى معادلة خطيه ويكون معامل التكامل هو e^{-x} وبالتالى يكون حلها هو

$$ye^{-x} = xe^{-x} + e^{-x} + c$$

أى

$$y = x + 1 + ce^x \quad (10)$$

وحيث أن $x = 0, y = 2$ وبإستخدام (10) نجد أن $c = 1$ وبذلك يكون الحل التام هو

$$y = x + 1 + e^x \quad (11)$$

ونعرف أن

$$e^x = 1 + x + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^3}{3!} + \dots \quad (12)$$

ومن (8) ،(12) نجد أن الحل التقريبى يؤول الى

$$y = 1 + x + 1 + \frac{x}{1!} + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^3}{3!} + \dots$$

$$y = 1 + x + e^x$$

٣ - إستخدام طريقه بيكارد التقريبيه لإيجاد حلول نظام تفاضلى:

ليكن لدينا

$$\left.\begin{aligned}\frac{dy}{dx}&=f(x,y,z)\\ \frac{dz}{dx}&=g(x,y,z),\end{aligned}\right\} \qquad (1)$$

وكانت $y=y_0, z=z_0$ عندما $x=x_0$ والتقريب النونى (y_n, z_n) لمسألة القيمة الحدية (1) تعطى بالعلاقه

$$y_n=y_0+\int_{x_0}^{x} f(s, y_{n-1}, z_{n-1})ds \qquad (2)$$

$$z_n=z_0+\int_{x_0}^{x} g(s, y_{n-1}, z_{n-1})ds \qquad (3)$$

مثال(د)

أوجد التقريب الثالث لحل المعادلات

$$\frac{dy}{dx}=z, \frac{dz}{dx}=x^3(y+z), y_0=1, z_0=1/2, x_0=0$$

مستخدما طريقه بيكارد

الحل :

لدينا

$$\frac{dy}{dx}=z, \frac{dz}{dx}=x^3(y+z), y_0=1, z_0=1/2, x_0=0 \qquad (1)$$

ونعرف أن التقريب النونى (y_n, z_n) لمسألة القيمه الإبتدائية

$$\begin{aligned}\frac{dy}{dx}&=f(x,y,z)\\ \frac{dz}{dx}&=g(x,y,z)\end{aligned} \qquad (2)$$

وأن $y=y_0, z=z_0$ عندما $x=x_0$ يعطى بالعلاقة

$$y_n = y_0 + \int_{x_0}^{x} f(x, y_{n-1}, z_{n-1})ds \qquad (3)$$

$$z_n = z_0 + \int_{x_0}^{x} g(x, y_{n-1}, z_{n-1})ds \qquad (4)$$

وبمقارنه (1) ، (2) يكون لدينا

$$f(x,y,z) = z, g(x,y,z) = x^3(y+z), y_0 = 1, z_0 = 1/2, x_0 = 0 \qquad (5)$$

من (3) نجد أن

$$y_n = 1 + \int_0^x z_{n-1}ds \qquad (6)$$

ومن (4) نجد أن

$$z_n = \frac{1}{2} + \int_0^x s^3(y_{n-1} + z_{n-1})ds \qquad (7)$$

التقريب الأول:

بوضع n=1 فى (6) وبإستخدام (5) نحصل على

$$y_1 = 1 + \int_0^x z_0 ds = 1 + \int_0^x \frac{1}{2} ds = 1 + \frac{1}{2}x \qquad (8)$$

بوضع n=1 فى (7) وإستخدام (5) نحصل على

$$z_1 = \frac{1}{2} + \int_0^x s^3(y_0 + z_0)ds = \frac{1}{2} + \int_0^x s^3(1 + \frac{1}{2})ds = \frac{1}{2} + \frac{3x^4}{8} \qquad (9)$$

التقريب الثانى: بوضع n=2 فى (6) وإستخدام (9) نحصل على

$$y_2 = 1 + \int_0^x z_1 ds = 1 + \int_0^x (\frac{1}{2} + \frac{3}{8}s^4)ds = 1 + \frac{1}{2}x + \frac{3x^5}{40} \qquad (10)$$

وكذلك بوضع n=2 فى (7) وإستخدام (8) ، (9) نحصل على

$$z_2=\frac{1}{2}+\int_0^x s^3(y_1+z_1)ds=\frac{1}{2}+\int_0^x s^3(1+\frac{1}{2}s+\frac{1}{2}+\frac{3}{8}s^4)ds$$

$$=\frac{1}{2}+\frac{3}{8}x^4+\frac{1}{10}x^5+\frac{3}{64}x^8 \qquad (11)$$

التقريب الثالث: بوضع n=3 فى (6) وإستخدام (11) نحصل على

$$y_3=1+\int_0^x z_2 ds=1+\int_0^x(\frac{1}{2}+\frac{3}{8}s^4+\frac{1}{10}s^5+\frac{3}{64}s^8)ds=1+\frac{1}{2}x+\frac{3}{40}x^5+\frac{1}{60}x^6+\frac{1}{192}x^9$$

وكذلك بوضع n=3 فى (7) وإستخدام (10)، (11) نحصل على

$$z_3=\frac{1}{2}+\int_0^x s^3(y_2+z_2)ds=\frac{1}{2}+\int_0^x s^3[1+\frac{s}{2}+\frac{3s^5}{40}+\frac{1}{2}+\frac{3s^4}{8}+\frac{s^5}{10}+\frac{3s^8}{64}]ds$$

$$=\frac{1}{2}+\frac{3}{8}x^4+\frac{1}{10}x^5+\frac{3}{64}x^8+\frac{7}{360}x^9+\frac{1}{256}x^{12}$$

مثال(٦)

أوجد التقريب الثالث لحل مسألة القيمة الإبتدائية

$$\frac{d^2y}{dx^2}=x^3(y+\frac{dy}{dx}),y=1,\frac{dy}{dx}=\frac{1}{2},x=0$$

الحل :

لدينا

$$\frac{d^2y}{dx^2}=x^3(y+\frac{dy}{dx}),y=1,\frac{dy}{dx}=\frac{1}{2},x=0 \qquad (1)$$

وبوضع $z=\frac{dy}{dx}$ فيكون $\frac{d^2y}{dx^2}=\frac{dz}{dx}$ وعلى ذلك فإن:

$$\frac{dy}{dx}=z,\frac{dz}{dx}=x^3(y+z),y=1,z=\frac{1}{2},x=0 \qquad (2)$$

وتؤول المسأله إلى المثال رقم (٥) السابق.

٤ -وجود حل المعادلة التفاضلية ووحدويته :

ليكن لدينا مسألة القيمه الإبتدائية

$$\left|\frac{dy}{dx}\right|+|y|=0,\ y(0)=1 \qquad (1)$$

وليكن $y \neq 0$ وبالقسمة على $|y|$ وبالتكامل نحصل على تناقض وبالتالى فإن $y=0$ هو الحل الوحيد للمعادلة التفاضليه ولكن هذا الحل لايحقق الشرط الإبتدائى $y(0)=1$ وبالتالى فإن مسألة القيمة الإبتدائية (1) ليس لها حل على الإطلاق.

ونعتبر الآن مسألة القيمة الإبتدائية

$$\frac{dy}{dx}=x,\ y(0)=1 \qquad (2)$$

وبالتكامل نحصل على حل لها وهو $y=\frac{1}{2}x^2+c$ حيث c ثابت إختيارى وبإستخدام الشرط الإبتدائى $y(0)=1$ أى عندما $x=0$ تكون $y=1$ نحصل على $c=1$ وبالتالى يكون حل مسألة القيمة الإبتدائية هو $y=\frac{1}{2}x^2+1$

وأخيرا اعتبر مسألة القيمة الإبتدائية

$$\frac{dy}{dx}=\frac{(y-1)}{x},\ y(0)=1 \qquad (3)$$

الذى يكون حلها هو $y=1+xc$

وبإستخدام الشرط الإبتدائى $y(0)=1$ نرى أنه لايمكن تحديد قيمة c وبالتالى فإن مسألة القيمة الإبتدائية المعطاه لها عدد لانهائى من الحلول معطاه بالعلاقه $y-1=xc$ حيث c ثابت إختيارى

هذا الجدل يقودنا إلى أن مسألة القيمة الإبتدائية

$$\frac{dy}{dx}=f(x,y),\ y(x_0)=y_0 \qquad (4)$$

قد يكون لها حل وحيد ، أوأكثر من حل ، أولا يوجد لها حل على الإطلاق وهذا يقودنا إلى الأسئله الأساسية التالية: -

أ - وجود الحل(existence):تحت أى الشروط يكون لمسألة القيمة الإبتدائية (4) لها حل واحد على الأقل؟

ب - وحدوية الحل(uniqueness) : تحت أى الشروط يكون لمسألة القيمة الإبتدائية (4) حل واحد ؟

تسمى النظرية التى تحوى هذه الشروط بنظرية الوجود ونظرية الوحدوية على الترتيب.

٥ -شرط لبشتز Lipschitz condition:

يقال أن الدالة $f(x,y)$ تحقق شرط لبشتز فى المنطقة D فى المستوى xy إذا وجد ثابت $K>0$ بحيث إن

$$\left|f(x,y_2)-f(x,y_1)\right|\le K\left|y_2-y_1\right|$$

حيث إن النقطتين $(x,y_2),(x,y_1)$ تقعان فى المنطقه D. ويسمى الثابت K بثابت لبشتز للدالة $f(x,y)$.

٦ -نظرية الوجود والوحدوية

نظرية (٢)

لتكن دالة $f(x,y)$ متصلة فى النطاق D من المستوى xy ،وأن M ثابت بحيث

$$\left|f(x,y)\right|\le M,(x,y)\in D \qquad (1)$$

وتحقق شرط لبشتز فى y أى

$$\left|f(x,y_1)-f(x,y_2)\right|\le K\left|y_1-y_2\right| \qquad (2)$$

حيث K ثابت لايعتمد على y_2,y_1,x.

ليكن R هو المستطيل المعرف بالعلاقه

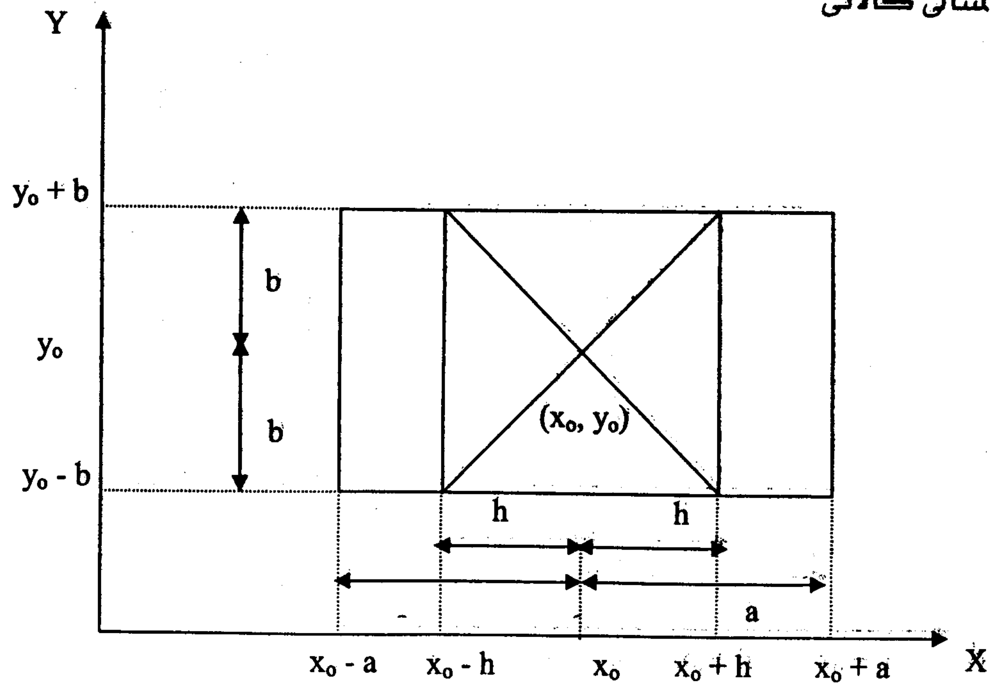
$$|x-x_0| \le a, |y-y_0| \le b \qquad (3)$$

يقـــع فـــى D حيـــث $Mh < b, h = \min(a, b/M)$ فـــإن المعادلـــة التفاضـــلية

$\frac{dy}{dx} = f(x,y)$ لها حل وحيد $y = y(x)$ حيث $y(x_0) = y_0$ لكل $|x-x_0| \le h$.

البرهان:

سوف نثبت هذه النظريه بإستخدام طريقه بيكارد للتقارب المتتالى. ليكن x بحيث $|x-x_0| \le h$. فإننا نعرف متتابعه الدوال $y_n(x), \dots, y_2(x), y_1(x)$ وتسمى التقريب المتتالى كالآتى



$$\left.\begin{array}{l}
y_1(x)=y_0+\int_{x_0}^{x} f(s,y_0)ds \\
y_2(x)=y_0+\int_{x_0}^{x} f(s,y_1)ds \\
------------------ \\
y_{n-1}(x)=y_0+\int_{x_0}^{x} f(s,y_{n-2})ds \\
y_n(x)=y_0+\int_{x_0}^{x} f(s,y_{n-1})ds
\end{array}\right\} \qquad (4)$$

سوف نقسم البرهان إلى خمس خطوات رئيسية: -

الخطوة الأولى:

سوف نثبت لكل $x_0-h\le x\le x_0+h$ أن المنحنى $y=y_n(x)$ يقع داخل R أى أن $y_0-b<y<y_0+b$ والآن

$$|y_1-y_0|=\left|\int_{x_0}^{x} f(s,y_0)ds\right|\le \int_{x_0}^{x}|f(s,y_0)||ds|$$

أى

$$|y_1-y_0|\le M\,|x-x_0|\le Mh<b$$

باستخدام (1) . (3) ، هذا يبرهن النظرية عندما n=1

نفرض أن $y=y_{n-1}(x)$ تقع فى R وبالتالى تكون $f(x,y_{n-1}(x))$ معرفه ومتصله وتحقق $|f(x,y_{n-1}(x))|\le M$ على الفترة $[x_0-h,x_0+h]$.

نحصل من (4) على

$$|y_n - y_0| = \left|\int_{x_0}^{x} f(s, y_{n-1}) ds\right| \le \int_{x_0}^{x} |f(s, y_{n-1})||ds| \le M|x - x_0| \le Mh < b$$

كما سبق ، والتى تثبت أن $y_n(x)$ تقع فى R وبالتالى $f(x, y_n)$ معرفه ومتصله على $[x_0 - h, x_0 + h]$.وهذا يبين النتيجه المطلوبه محققه لكل n بالإستنتاج الرياضى

الخطوة الثانية:

سوف نثبت بالإستنتاج الرياضى أن

$$|y_n - y_{n-1}| \le \frac{MK^{n-1}}{n!}|x - x_0|^n \tag{5}$$

سبق أن أثبتنا صحة (5) عندما n=1 فى الخطوه الأولى حيث أثبتنا $|y_1 - y_0| \le M|x - x_0|$. نفرض أن المتباينه (5) صحيحة عند n-1 بدلا من n ، أى أن

$$|y_{n-1} - y_{n-2}| \le \frac{MK^{n-2}}{(n-1)!}|x - x_0|^{n-1} \tag{6}$$

فيكون لدينا

$$|y_n - y_{n-1}| = \left|\int_{x_0}^{x} \{f(s, y_{n-1}) - f(s, y_{n-2})\} ds\right|$$

أى

$$|y_n - y_{n-1}| = \int_{x_0}^{x} |f(s, y_{n-1}) - f(s, y_{n-2})||ds| \tag{7}$$

و بإستخدام شرط لبشتز (2) نجد أن

$$|f(x, y_{n-1}) - f(x, y_{n-2})| \le K|y_{n-1} - y_{n-2}| \tag{8}$$

ومن (7) ، (8) نحصل على

$$|y_n - y_{n-1}| \le \int_{x_0}^{x} K|y_{n-1} - y_{n-2}||dx| \le K.\frac{MK^{n-1}}{(n-1)!}.\frac{|x-x_0|^n}{n}$$

باستخدام (6)

وبذلك تكون المتابينه (5) صحيحة بإستخدام الإستنتاج الرياضى.

الخطوة الثالثه:

سوف نثبت أن المتتابعه $\{y_n\}$ تتقارب بإنتظام إلى نهاية لكل $x_0 - h \le x \le x_0 + h$.

من الخطوة الثانية

$$|y_n - y_{n-1}| \le \frac{MK^{n-1}h^n}{n!},$$

لكل قيم n حيث $|x - x_0| \le h$. وبإستخدام ذلك فإن المتسلسله اللانهائيه

$$\begin{aligned} & y_0 + (y_1 - y_0) + (y_2 - y_1) + \dots + (y_n - y_{n-1}) + \dots \\ & \le y_0 + Mh + \frac{1}{2!}MKh^2 + \dots + \frac{1}{n!}MK^{n-1}h^n + \dots \\ & \le y_0 + \frac{M}{K}[e^{Kh} - 1] \end{aligned}$$

وهى تقاربيه لكل قيم M, h, K وبالتالى تكون المتسلسله (9) تقاربيه بإنتظام على الفترة $[x_0 - h, x_0 + h]$. وحيث إن الحدود فى (9) هى دوال متصله فى x ويكون مجموعها مساويا

$$\lim_{n\to\infty} y_n(x) = y(x) \qquad (10)$$

(مثلا) لأن $[y_n = y_0 + \sum_{k=1}^{n}(y_k - y_{k-1})]$

والذى يجب أن يكون متصلا

الخطوة الرابعة:

سوف نثبت أن $y = y(x)$ يحقق المعادلة التفاضليه $\frac{dy}{dx} = f(x,y)$ وحيث إن $y_n(x)$ تؤول بإنتظام إلى $y(x)$ فى الفترة $[x_0 - h, x_0 + h]$

وبإستخدام شرط لبشتز

$$|f(x,y) - f(x,y_n)| \le K|y - y_n|$$

الذى يبين أن $f(x,y_n)$ تؤول بإنتظام إلى $f(x,y(x))$

ويكون لدينا من (4)

$$y_n(x) = y_0 + \int_{x_0}^{x} f(s, y_{n-1}(s))ds$$

أو

$$\lim_{n\to\infty} y_n(x) = y_0 + \lim_{n\to\infty} \int_{x_0}^{x} f(s, y_{n-1}(s))ds$$

وحيث إن المتتابعه $\{f(x,y_n(x))\}$ ،والتى تتكون من دوال متصله على الفترة المعطاه تتقارب بإنتظام إلى $f(x,y(x))$ على نفس الفتره وبإستخدام (10)نحصل على

$$y(x) = y_0 + \int_{x_0}^{x} \lim_{n\to\infty} f(x, y_{n-1}(x))dx$$

أى

$$y(x) = y_0 + \int_{x_0}^{x} f(x, y(x))dx \qquad (11)$$

والدالة المكاملة فى الطرف الأيمن من (11) دالة متصله فى x وبالتالى فإن التكامل يكون له مشتقه. وعلى ذلك فإن دالة النهاية $y(x)$ تحقق المعادلة التفاضليه $\frac{dy}{dx} = f(x,y)$، على الفترة $[x_0 - h, x_0 + h]$ بحيث $y(x_0) = y_0$.

وبذلك فإن الخطوات الأربع السابقه تثبت وجود حل مسألة القيمة الإبتدائية.

الخطوة الخامسة:

سوف نثبت أن الحل $y = y(x)$ هو الحل الوحيد الذى يحقق $y(x_0) = y_0$.

نفرض أن $y = Y(x)$ مثلا حل آخر لمسألة القيمة الإبتدائية المعطاة.

ليكن

$$|Y(x) - y(x)| \le B, |x - x_0| \le h \tag{12}$$

من (11) نحصل على

$$|Y(x) - y(x)| = \left| \int_{x_0}^{x} [f(s, Y(s)) - f(s, y(s))] ds \right|$$

أى

$$|Y(x) - y(x)| \le \int_{x_0}^{x} |f(s, Y(s)) - f(s, y(s))| |ds|$$

أى

$$|Y(x) - y(x)| \le K \int_{x_0}^{x} |Y(s) - y(s)| |ds| \tag{13}$$

أى بإستخدام (12)

$$|Y(x) - y(x)| \le KB |x - x_0| \tag{14}$$

من (13) ، (14) نحصل على

$$|Y(x) - y(x)| \le K^2 B \int_{x_0}^{x} |s - x_0| dx \le \frac{K^2 B |x - x_0|^2}{2!} \tag{15}$$

وكذلك بالتعويض مرة اخرى من (15) فى دالة المكاملة فى (13) نحصل على

$$|Y(x) - y(x)| \le \frac{K^3 B}{2!} \int_{x_0}^{x} |s - x_0|^2 ds \le \frac{K^3 B |x - x_0|^3}{3!}$$

وبتكرار هذه الطريقه نحصل على

$$|Y(x)-y(x)| \le \frac{K^n B|x-x_0|^n}{n!} \le B\frac{(Kh)^n}{n!}$$

وحيث إن المتسلسلة $\sum_{n=0}^{n} B\frac{(Kh)^n}{n!}$ تتقارب وبالتالى يكون

$$\lim_{n\to\infty} B\frac{(Kh)^n}{n!} = 0$$

وعلى ذلك يمكن جعل $|Y(x)-y(x)|$ أصغر من أى عدد مهما كان صغيرا وبالتالى فإن

$$Y(x)-y(x)=0 \quad \text{أى} \quad Y(x)=y(x)$$

وهذا يبين أن $y=y(x)$ دائما حل وحيد وبهذا يتم برهان النظرية.

ملحوظة: إذا كانت الدالة $f(x,y)$ تحقق الشرط

$$|\partial f/\partial y| \le K \qquad (i)$$

لكل قيم (x,y) فى النطاق المعطى فإن شرط لبشتز يتحقق لنفس الثابت K.

ولإثبات ذلك نرى من نظرية القيمة المتوسطة

$$f(x,y_2)-f(x,y_1)=(y_2-y_1)\left(\frac{\partial f}{\partial y}\right)_{y=\bar{y}}, y_1<\bar{y}<y_2 \qquad (ii)$$

حيث كل من $(x,y_2),(x,y_1)$ يقع فى النطاق المعطى

ومن (i)، (ii) نجد أن

$$|f(x,y_2)-f(x,y_1)| \le K|y_2-y_1| \qquad (iii)$$

وهو شرط لبشتز. وهذا يبين أنه يمكن إستبدال شرط لبشتز(iii) بشرط أقوى (i).

نظرية ٣:

إذا كـــان S إمـــا المســـتطيل $|x-x_0|\le h, |y-y_0|\le k$ أوالشـــريط $|x-x_0|\le h, |y|<\infty$ ، $f(x,y)$ دالة حقيقية معرفة على S بحيث إن $\frac{\partial f}{\partial y}$ موجودة ومتصلة على S وأن $\left|\frac{\partial f}{\partial y}\right|\le K$ $(x,y)\in S,$ فـإن $f(x,y)$ تحقق شـرط لبشـتز علـى S بثابت لبشتز K.

البرهان:

حيث أن $$|f(x,y_1)-f(x,y_2)| = \left|\int_{y_1}^{y_2}\frac{\partial}{\partial y}f(x,y)dy\right| \le \int_{y_1}^{y_2}\left|\frac{\partial f}{\partial y}\right||dy| \le K\int_{y_1}^{y_2}|dy|$$

وبالتالى فإن
$$|f(x,y_1)-f(x,y_2)|\le K|y_1-y_2|, \qquad (x,y_1),(x,y_2)\in S$$

وهذا يبين أن $f(x,y)$ تحقق شرط لبشتز بثابت K.

مثال (١)

أثبت أن $f(x,y)=xy^2$ تحقق شرط لبشتز على المستطيل $S:|x|\le 1, |y|\le 1$ ولكـن لاتحقق شرط لبشتز على الشريحه $|x|\le 1, |y|<\infty$.

الحل:

ليكـن $(x,y_1),(x,y_2)$ نقطتين فى المستطيل S فإن

$$|f(x,y_2)-f(x,y_1)| = |xy_2^2-xy_1^2| = |x||y_2+y_1||y_2-y_1| \qquad (1)$$

وعلى ذلك فإنه فى المستطيل $|x|\le 1, |y|\le 1$ فإن (١) تؤول إلى
$$|f(x,y_2)-f(x,y_1)|\le 1.2.|y_2-y_1|$$

وهذا يبين تحقق شرط لبشتز بثابت 2.

ولكن

$$|f(x,y_2)-f(x,0)|==|x||y_2|\to\infty$$

عندما $\infty\to|y_2|$ إذا كان $a\neq|x|$ وهذا يبين أن شرط لبشتز غير متحقق على الشريحة $|y|<\infty,|x|<1$.

مثال(٢)

إذا كان S هو المستطيل $|x|\leq 0,|y|\leq b$ أثبت أن الدالة $f(x,y)=x^2+y^2$ تحقق شرط لبشتز ثم أوجد ثابت لبشتز

الحل :

ليكن $(x,y_1),(x,y_2)$ نقطتين فى S فإن

$$|f(x,y_2)-f(x,y_1)|=|(x^2+y_2^2)-(x^2+y_1^2)|=|y_2^2-y_1^2|=|y_2+y_1||y_2-y_1|$$

وبالتالى فإن

$$|f(x,y_2)-f(x,y_1)|\leq 2b|y_2-y_1|$$

وهذا يبين أنها تحقق شرط لبشتز بثابت $K=2b$.

مثال(٣)

إثبت أن إتصال الدالة $f(x,y)$ ليس كافيا لضمان وحدوية حل مسألة القيمة الإبتدائية $y(0)=0,\dfrac{dy}{dx}=f(x,y)=\sqrt{|y|}$ أوبعبارة أخرى إثبت أن حل مسألة القيمة الإبتدائية $y(x_0)=y_0,\dfrac{dy}{dx}=f(x,y)$ يمكن أن يكون لها أكثر من حل بالرغم من أن $f(x,y)$ دالة متصله.

الحل

نعتبر مسألة القيمة الإبتدائية

$$\frac{dy}{dx}=\sqrt{|y|},\, y(0)=0$$

واضح أن $f(x,y)=\sqrt{|y|}$ دالة متصلة لكل قيم y وأن المعادلة (1) لها الحلين

$$y\equiv 0,\, y=\begin{cases} x^2/4 & x\ge 0 \\ -x^2/4 & x<0 \end{cases}$$

ف تثبت أن شرط لبشتز

$$\frac{|f(x,y_2)-f(x,y_1)|}{y_2-y_1}\le K$$

تحقق فى أى منطقة تحتوى على الخط $y=0$. فمثلا عندما $y_1=0$ ، y_2

إن

$$\frac{|f(x,y_2)-f(x,y_1)|}{y_2-y_1}=\frac{\sqrt{y_2}}{y_2}=\frac{1}{\sqrt{y_2}} \qquad (\because \sqrt{y_2}>0)$$

يبنا أن المقدار فى الطرف الأيسر يمكن جعله كبيرا كما نريد بإختيار y_2 صغيره صغرا كافيا وهذا يتعارض مع (2) حيث إن المقدار فى الطرف الأيسر لايجب أن يتجاوز عدد ثابت K.

مثال(٤)

إعط مثالا تبين فيه أن الدالة المتصلة يمكن ألا تحقق شرط لبشتز على مستطيل ما.

الحل :

نأخذ مثلا الدالة $f(x,y)=y^{2/3}$ على المستطيل

$$S:|x|\le 1, |y|\le 1 \qquad (1)$$

من الواضح أن $f(x,y)$ متصله على S.

ولكن

$$\left|\frac{\partial}{\partial y} f(x,y)\right| = \left|\frac{2}{3y^{1/3}}\right| \to \infty \qquad (2)$$

عندما $y \to 0$ وحيث إن $y = 0$ نقطة فى S فإن المعادلة (2) تبين أن شرط لبشتز غير متحقق للدالة $f = y^{2/3}$ على S.

مثال(٥)

لمسألة القيمة الإبتدائية $\frac{dy}{dx} = e^y, y(0) = 0$ أوجد أكبر فترة $|x| \le a$ التى يكون فيها لمسألة القيمة الإبتدائية حل وحيد.

الحل:

ليكن $|f(x,y)| \le M$ وعلى ذلك فإن $|y - y_o| \le Ma$

(انظر النظرية حيث a بدلا من h ووضعنا $y_o = 0$)

أي $e^y \le M \, , |y - 0| < Ma$

ليكن y_1, y_2 فى نطاق $|y| \le Ma$ ، $y_1 < y_2$ فإنه بإستخدام نظرية القيمة المتوسطة نجد أن

$$e^{y_2} - e^{y_1} = (y_2 - y_1)\left(\frac{\partial}{\partial y} e^y\right)_{y=\bar{y}}, \qquad \bar{y} \in (y_1, y_2)$$

أى

$$e^{y_2} - e^{y_1} \le (y_2 - y_1)M \qquad \text{لأن } e^{\bar{y}} < M.$$

وهذا يبين أن e^y تحقق شرط لبشتز. وكذلك فإن المتباينة $e^y < M$ سوف تتحقق لكل قيم y بحيث إن $|y| \le Ma$ بشرط أن لكل $y = Ma$ فإن

$$e^{Ma} \le M$$

أو

$$a \le \ln M / M$$

بإستخدام طرق إيجاد القيم العظمى والصغرى لدالة ما يمكن بسهولة أن نثبت أن الدالة $(\ln M)/M$ لها قيمة عظمى عندما $M = e = 2.718$. وبالتالى فإن نظرية الوحدوية لمسألة القيمة الإبتدائية تعطى $|x| \le a$ عندما $a = 1/e = 0.308$ وبالتالى تكون أكبر فترة هى $|x| \le 0.308$.

مثال(٦)

إثبت أنه فى مسألة القيمة الإبتدائية $y(0) = 1$, $\frac{dy}{dx} = y$ ، يجب أن يكون الثابت a فى نظرية بيكارد أقل من الواحد.

الحل

ليكن $|f(x,y)| < M$ ، فإن $|y - y_0| \le Ma$

(انظر مثال (5)) ، وعلى ذلك فإن $|y - 1| \le Ma$

حيث $|y| \le M$

بإختيار $M \ge 1$. فإن شرط لبشتز يتحقق أيضا لأنه فى هذه الحالة بأخذ الصورة

$$|f(x,y_2) - f(x,y_1)| = |y_2 - y_1| \le M|y_2 - y_1|, \quad M \ge 1$$

وكذلك

$$|y-1| \le Ma \Rightarrow |y| - 1 \le Ma$$

ومن ذلك يلى أن الشرط $|y| \le M$ سوف يتحقق لكل قيم $|y-1| \le Ma$ بحيث إن $|y| = 1 + Ma$ وعلى ذلك فإن

$$1 + Ma \le M \Rightarrow a < (M-1)/M = 1 - \frac{1}{M} < 1$$

عندما $1 \le M < \infty$.

ملحوظة: فى الأمثله السابقه لم نعين $h = \min(a, b/M)$ وهى الفترة $|x - x_0| \le h$ التى يكون لمسألة القيمة الإبتدائية حل حلا وحيداً وسنوضح ذلك فى الأمثله الآتية.

مثال (١):

أوجد التقريب الثانى لمسألة القيمة الإبتدائية

$$\frac{dy}{dx} = x^2 + y^2, y(0) = 0$$

الحل:

نلاحظ أن $f(x,y) = x^2 + y^2$ كثيرة حدود فى y,x ومتصلة على المستطيل

$$R: |x| \le a, |y| \le b$$

$$|f(x,y)| = |x^2 + y^2| \le |x^2| + |y^2| \le a^2 + b^2 = M$$

وعلى ذلك فإن

$$h = \min(a, b/M) = \min(a, b/a^2 + b^2)$$

اى أن h تعتمد على b,a فإذا كانت $b=1, a=1$ فإن $h = \min(1,\frac{1}{2}) = \frac{1}{2}$ وعلى ذلك يكون لمسألة القيمة الإبتدائية المعطاة حل وحيد على الفترة $|x| \le 1/2$.

بإستخدام طريقه بيكارد للتقريب المتتالى ،حيث

$$y_n(x) = y_0 + \int_{x_0}^{x} f(s, y_{n-1}(s))ds, \quad y(0) = 0 \qquad (1)$$

التقريب الأول:

نضع n=1 فى (1) نحصل على

$$y_1 = 0 + \int_0^x s^2 ds = x^3/3, y(0) = 0$$

التقريب الثانى:

بوضع n=2 فى (1) نحصل على

$$y_2(x) = \int_0^x (s^2 + \frac{s^6}{63})ds = \frac{x^3}{3} + \frac{x^7}{63}$$

مثال (٢) :

أوجد التقريب الثانى لمسألة القيمة الإبتدائية

$$\frac{dy}{dx}=x^2+y^2,y(0)=1$$

على المستطيل $R:\{(x,y):|x|\le 1,|y-1|\le 1\}$

الحل

نلاحظ أن $f=x^2+y^2$ كثيرة الحدود ومتصلة على R، وأن $a=1,b=2$،

وعليه فإن

$$|f(x,y)|=|x^2+y^2|\le 5$$

$$\left|\frac{\partial f}{\partial y}\right|=2x=4$$ (الذى يمثل ثابت لبشتز)

وعلى ذلك فإن

$$M=5,h=\min(1,\frac{2}{5})=2/5$$

أى أن للمعادلة حلا على الفترة $|x|\le 2/5$

ويكون الحل التقريبى النونى للمعادلة هو

$$y_n=y_0+\int_{x_0}^{x}f(s,y_{n-1}(s))ds,y(x_0)=y_0 \qquad (2)$$

التقريب الأول:

بوضع n=1 فى (2) نحصل على

$$y_1(x)=1+\int_0^x(s^2+1)ds=1+x+\frac{x^3}{3}$$

التقريب الثانى:

بوضع n=2 فى (2) نحصل على

$$y_2(x)=1+\int_0^x\left[s^2+\left(1+s+\frac{s^3}{3}\right)^2\right]ds=1+x+x^2+\frac{2}{3}x^3+\frac{1}{6}x^4+\frac{1}{25}x^5+\frac{1}{63}x^7$$

٧ - متباينه جرونويل Gronwall`s inequality

هذه المتباينه لها أهميتها فى المعادلات التفاضلية.

نظرية٤:

إذا كانت $g(x), f(x)$ دالتين غير سالبتين و متصلتين لكل $x \geq x_0$ ، K ثابت موجب وأن

$$f(x)\leq K+\int_{x_0}^{x}g(s)f(s)ds, x\geq x_0$$

فإن

$$f(x)\leq K\exp(\int_{x_0}^{x}g(s)ds)$$

البرهان:

من الفرض

$$\frac{f(x)g(x)}{K+\int_{x_0}^{x}g(s)f(s)ds}\leq g(x)$$

وبالتكامل بالنسبة إلى x من x_0 إلى x نحصل على

$$\ln\left[K+\int_{x_0}^{x}g(s)f(s)ds\right]_{x_0}^{x}\leq\int_{x_0}^{x}g(s)ds$$

$$\ln\left[K+\int_{x_0}^{x}g(s)f(s)ds\right]-\ln k\leq\int_{x_0}^{x}g(s)ds$$

وبالتالى فإن

$$K+\int_{x_0}^{x} g(s)f(s)ds \le K\exp\int_{x_0}^{x} g(s)ds$$

أى

$$f(x) \le K\exp\int_{x_0}^{x} g(s)ds$$

وبذلك نثبت النظرية.

نتيجة (١):

إذا كان $f(x) \le K\exp\int_{x_0}^{x} f(s)ds$ حيث $K, f(x)$ كما فى النظرية السابقه فأن

$f(x) \equiv 0$

البرهان:

ليكن $\varepsilon > 0$ فإن

$$f(x) < \varepsilon + K\int_{x_0}^{x} f(s)ds$$

وبإستخدام النظرية السابقه نجد أن

$$f(x) < \varepsilon\exp[k(x-x_0)], x \ge x_0$$

وبأخذ النهايه عندما $\varepsilon \to 0$ نحصل على

$$f(x) \equiv 0$$

وبهذا يثبت البرهان.

<u>ملحوظة:</u> يمكن إستخدام متباينه جرونويل فى إثبات وحدوية حل مسألة القيمة الإبتدائية السابقة

ليكن لدينا مسألة القيمة الابتدائية

$$\frac{dy}{dx} = f(x,y) \ , \qquad y(x_0) = y_0 \tag{1}$$

والتى تكافئ المعادلة التكاملية

$$y(x) = y_0 + \int_{x_0}^{x} f(s, y(s))ds \tag{2}$$

إذا كان للمسألة (١) [أو المعادلة المكافئه (٢)] حلان y_1, y_2 يحققان الشرط الإبتدائى فإن

$$y_1 = y_0 + \int_{x_0}^{x} f(s, y_1(s))ds$$

$$y_2 = y_0 + \int_{x_0}^{x} f(s, y_2(s))ds$$

ومن ذلك نجد أن

$$y_1 - y_2 = \int_{x_0}^{x} [f(s, y_1(s)) - f(s, y_2(s))]ds$$

أى أن

$$|y_1 - y_2| = \int_{x_0}^{x} |f(s, y_1(s)) - f(s, y_2(s))||ds|$$

وبإستخدام شرط لبشتز نحصل على

$$|y_1 - y_2| \le K \int_{x_0}^{x} |y_1(s) - y_2(s)||ds|$$

وإستخدام متباينه جرونويل [مع ملاحظه عدم وجود ثابت قبل علامه التكامل] نجد أن

$$|y_1 - y_2| \le 0.\exp(k|x - x_0|) \le 0$$

وعليه فإن $|y_1 - y_2| = 0$ أى $y_1(x) = y_2(x)$

وبهذا يثبت المطلوب.

٨ - إعتماد حل مسالة القيمة الإبتدائية على الشرط الإبتدائى :

سوف نستخدم متباينه جرونويل فى إثبات أن حل مسألة القيمة الإبتدائية يعتمد تماما على الشرط الإبتدائى

فإذا كان هما $z(x), y(x)$ حلين لمسألة القيمة الإبتدائية (1) [أى المعادلة التكاملية (2)] ويحققان $z(x_0) = z_0, y(x_0) = y_0$ على الترتيب فإن.

$$y(x) = y_0 + \int_{x_0}^{x} f(s, y(s))ds$$

$$z(x) = z_0 + \int_{x_0}^{x} f(s, z(s))ds$$

أى أن

$$|y(x) - z(x)| \le |y_0 - z_0| + \left|\int_{x_0}^{x} |f(s, y(s) - f(s, z(s)| ds\right| \le |y_0 - z_0| + K \left|\int_{x_0}^{x} |y(s) - z(s)| ds\right|$$

وبإستخدام متباينه جرونويل نحصل على

$$|y(x) - z(x)| \le |y_0 - z_0| \exp(K|x - x_0|)$$

من هنا نرى أن حل مسألة القيمة الإبتدائية يعتمد على الشرط الإبتدائى.

مثال

إثبت أن مسألة القيمة الإبتدائية

$$y'' + g(t, y) = 0, y(0) = y_0, y'(0) = z_0$$

حيث g دالة متصله فى منطقة ما D تحتوى $(0, y_0)$ تكافئ المعادلة التكاملية

$$y(t) = y_0 + z_0 t - \int_{0}^{t} (t - s) g(s, y(s)) ds$$

الحل

ليكن $\phi(t)$ هو حلا لمسألة القيمة الإبتدائية أى أن

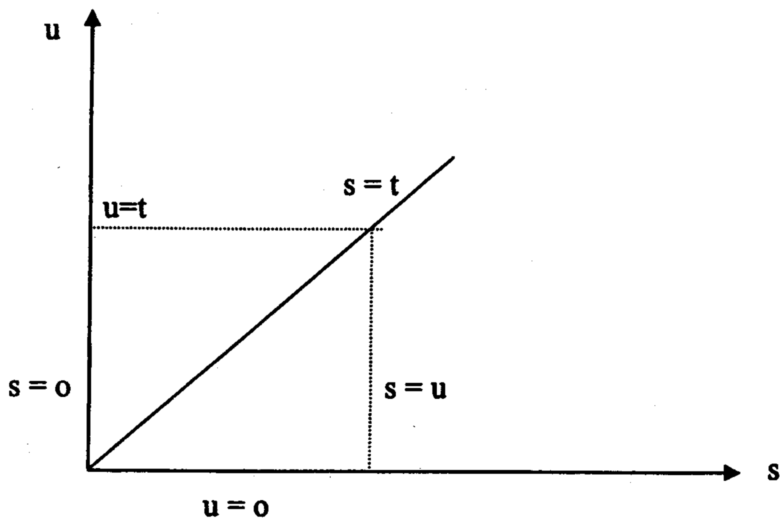
$$\phi'' + g(t,\phi(t)) = 0$$

وبالتكامل مرتين نحصل على

$$\phi(t) = -\int_0^t \left\{ \int_0^u g(s,\phi(s))ds \right\} du + a + bt \qquad (1)$$

وحيث أن $\phi'(0) = z_0, \phi(0) = y_0$ فإن $a = y_0, b = z_0$

والتكامل الثنائى ممتد على المنطقة فى المستوى uv كما هو مبين بالشكل.



وبعكس ترتيب التكامل نحصل على

$$\int_0^t \left\{ \int_0^u g(s,\phi(s))ds \right\} du = \int_0^t \left\{ \int_s^t du \right\} g(s,\phi(s))ds = \int_0^t (t-s) g(s,\phi(s))ds \qquad (2)$$

وبالتعويض من (٢) فى (١) نحصل على

$$\phi(t) = -\int_0^t (t-s)g(s,\phi(s))ds + y_0 + z_0 t$$

والآن نفرض أن ψ هو حلا للمعادلة التكاملية فإن $\psi(0) = y_0, \psi'(0) = z_0$ وبالتالى فإن $\psi(t)$ تحقق الشروط الإبتدائيه وبالإشتقاق مرتين وإستخدام النظرية الأساسية فى التفاضل نجد أن

$$\psi'(t) = z_0 - \int_0^t g(s,\psi(s))ds$$

$$\psi''(t) = -g(t,\psi(t))$$

وبالتالى فإن ψ هو حلا لمسألة القيمة الإبتدائية.

ملحوظه: مسألة القيمة الإبتدائية $y'' + g(t,y) = 0$ يمكن كتابتها على الصورة $y'' = -g(t,y)$ حيث $y'' = 0$ هى المعادلة التفاضلية المتجانسه المناظرة والذى حلها على الصورة $y = y_0 + z_0 t$.

تمارين

١ -أوجد التقريب الثالث لمسألة القيمة الحدية $\frac{dy}{dx}=x^2+y^2, y(0)=0$ على المستطيل $R=\{(x,y):|x|<1,|y|<1\}$ مستخدما طريقه بيكارد للتقريب.

٢ -أوجد المعادلة التكامليه المكافئه لمسألة القيمة الإبتدائية

$$y''+\mu^2 y=g(x,y), y(0)=y_0, y'(0)=z_0, \mu>0 \text{ (ثابت)}$$

٣ -أوجد التقريب الثالث لحل مسألة القيمة الحدية:

$(i)\ \frac{dy}{dx}=2xy, y(0)=1,$ $\qquad (ii)\ \frac{dy}{dx}=3e^x+2y, y(0)=0$

$(iii)\ \frac{dy}{dx}=1+xy, y(0)=2,$ $\qquad (iv)\ \frac{dy}{dx}=2x-y^2, y(0)=0$

$(v)\ \frac{dy}{dx}=x+z, \frac{dz}{dx}=x-y^2, y(0)=2, z(0)=1$

$(vi)\ \frac{dy}{dx}=2x+z, \frac{dz}{dx}=3xy-x^2z, y(0)=2, z(0)=0$

٤ -اثبت أن:

(أ) $|y'|+|y|=0, y(0)=1$ ليس لها حل.

(ب) $y'=x, y(0)=1$ لها حل وحيد .

(ج) $y'=(y-1)/x \quad , y(0)=1$ لها عدد لانهائى من الحلول.

٥ - إذا كانت $f(x,y)=y^{2/3}$ إثبت أن شرط لبشتز غير متحقق فى منطقة تحتوى نقطة الأصل وأن حل المعادلة $\frac{dy}{dx}=f(x,y)$ ويحقق الشرط $y(0)=0$ ليس وحيدا

٦ - إذا كان $S:|x|\le a,|y|\le b$ إثبت أن الدالة $f(x,y)=x\sin y+y\cos x$ تحقق شرط لبشتز وأوجد ثابت لبشتز.

٧ - إدرس وجود ووحداوية حل المعادلة $y'=y^2, y(1)=-1$.

٨ - إذا كانت الدوال f,g,h معرفه ومتصله وغير سالبه على الفترة $I=[0,\infty)$ وأن

$$f(x) \leq h(x) + \int_{x_0}^{x} g(s) f(s) ds, \qquad x \geq x_0$$

فأثبت أن.

$$f(x) \leq h(x) + \int_{x_0}^{x} g(s) h(s) (\exp \int_{x_0}^{s} g(u) du) ds$$

الباب الثاني

الأنظمة الخطية ذوات المعاملات الثابتة

Linear Systems with Constant Coefficients

الباب الثاني

الأنظمة الخطية ذوات المعاملات الثابتة

Linear Systems with Constant Coefficients

١ -الأنظمة من المعادلات التفاضلية :

ليكن أن x متغير مستقل وكلا من $y_1, y_2, \dots, y_n$ متغيرات تابعة للمتغير x ، ونفترض أن:

$$\frac{dy_1}{dx} = f_1(x, y_1, y_2, \dots, y_n)$$

$$\frac{dy_2}{dx} = f_2(x, y_1, y_2, \dots, y_n)$$

$$\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots$$

$$\frac{dy_n}{dx} = f_n(x, y_1, y_2, \dots, y_n)$$

تلك المجموعة من المعادلات السابقة تسمى نظام من المعادلات التفاضلية من الرتبة الأولى. ويمكن كتابة النظام على الصورة

$$\frac{dy_i}{dx} = f_i(x, y_1, y_2, \dots, y_n) \qquad ; i = 1, 2, \dots, n.$$

وحيث إن المعادلة التفاضلية من الرتبة الأولى تستلزم وجود شرط إبتدائى واحد فإن النظام من المعادلات التى عددها n ، يستلزم وجود n شرط إبتدائى، وتكون الشروط الإبتدائية $y_i(x_0) = y_{i0} \qquad , i = 1, 2, \dots, n$

كما أن حل المعادلة التفاضلية من الرتبة الأولى يحتوى على ثابت إختيارى واحد ، فإن حل نظام من المعادلات التفاضلية من الرتبة الأولى يحتوى n من الثوابت الإختيارية

حيث عدد المتغيرات في النظام n متغيرويكون حل النظام $y_i = \phi_i(x, c_1, c_2, ..., c_n), i = 1, 2, ..., n$ حيث $c_1, c_2, ..., c_n$ ثوابت إختيارية.

مثال(١)

أوجد حل النظام

$$\frac{dy}{dx} = y + z + x \qquad (1)$$

$$\frac{dz}{dx} = -4y - 3z + 2x \qquad (2)$$

مع الشروط الإبتدائية $y(0) = 1, z(0) = 0$ حيث x متغير مستقل.

الحل

بتفاضل (1) بالنسبة إلى x

$$\frac{d^2y}{dx^2} = \frac{dy}{dx} + \frac{dz}{dx} + 1 \qquad (3)$$

بالتعويض من (1)،(2) في الطرف الأيمن للمعادلة (3) نحصل على

$$\frac{d^2y}{dx^2} = y + z + x - 4y - 3z + 2x + 1$$

$$\frac{d^2y}{dx^2} = -3y - 2z + 3x + 1 \qquad (4)$$

ثم نعوض عن z من(1) فى(4)

$$\therefore \frac{d^2y}{dx^2} = -3y - 2[\frac{dy}{dx} - y - x] + 3x + 1$$

$$\therefore \frac{d^2y}{dx^2} + 2\frac{dy}{dx} + y = 5x + 1$$

أى أن $(D^2 + 2D + 1)y = 5x + 1; \qquad D = \frac{d}{dx}$

ولحل المعادلة السابقة نوجد

<u>أولا:</u> حل المعادلة المتجانسة $(D^2+2D+1)y=0$

نفترض أن $y=e^{\lambda x}$ حلا للمعادلة و تكون المعادلة المساعدة $\lambda^2-2\lambda+1=0$ والتى جذورها $\lambda=-1,-1$

أى أن $$y_H=(c_1+c_2x)e^{-x}$$

<u>ثانيا:</u> الحل الخاص

$$y_p=\frac{1}{(D+1)^2}(5x+1).$$

$$=(1-2D+3D^2-\ldots)(5x+1)=5x-10+1=5x-9$$

أى أن $$y=(c_1+c_2x)e^{-x}+5x-9$$

بالتعويض عن y فى (1) والحل بالنسبة إلى z

$$\therefore z=-(c_1+c_2x)e^{-x}+c_2e^{-x}+5-(c_1+c_2x)e^{-x}-5x+9-x$$

أى أن

$$z=(-2c_1+c_2-2c_2x)e^{-x}-6x+14$$

ومن الشروط الإبتدائية $y(0)=1, z(0)=0$ نحصل على

$1=c_1-9$ أى $c_1=10$ ، $0=(-2c_1+c_2)+14$ أى $c_2=20-14=6$

أى أن

$$z=(-14-12x)e^{-x}-6x+14 \text{ ، } y=(10+6x)e^{-x}+5x-9$$

تحقق الشروط الإبتدائية المعطاه

مثال (٢)

أوجد الحل العام للنظام

$$\frac{dx}{dt}=y+z \quad (1), \frac{dy}{dt}=x+z \quad (2), \frac{dz}{dt}=x+y \quad (3).$$

الحل

بتفاضل طرفى (1) بالنسبة إلى t نحصل على

$$\frac{d^2x}{dt^2}=\frac{dy}{dt}+\frac{dz}{dt}$$

من (3)، (2) نجد أن

$$\frac{d^2x}{dt^2}=2x+(y+z) \qquad \frac{d^2x}{dt^2}=x+z+x+y,$$

من (1) نحصل على

$$\frac{d^2x}{dt^2}-\frac{dx}{dt}-2x=0$$

وهى معادلة تفاضلية خطية متجانسة من الرتبة الثانية

بفرض أن $D=\frac{d}{dx}$ فيكون

$$(D^2-D-2)x=0$$

نفترض أن $x=e^{\lambda t}$ وتكون المعادلة المساعدة هى

$$\lambda^2-\lambda-2=0\Rightarrow(\lambda-2)(\lambda+1)=0\Rightarrow\lambda=2,-1$$

فنحصل على

$$x=c_1e^{2t}+c_2e^{-t} \tag{4}$$

بالتعويض فى (1) نجد أن

$$2c_1e^{2t}-c_2e^{-t}=y+z$$

$$z=2c_1e^{2t}-c_2e^{-t}-y \tag{5}$$

بالتعويض من (5)، (4) فى (2) نحصل على

$$\frac{dy}{dt}=c_1e^{2t}+c_2e^{-t}+2c_1e^{2t}-c_2e^{-t}-y.$$

أى أن $\frac{dy}{dt}+y=3c_1e^{2t}$

وهى معادلة تفاضلية خطية من الرتبة الأولى و يكون حلهاهو

$e^{\int dt}y=\int 3c_1e^{\int dt}e^{2t}dt+c_3$ أى $e^t y=3c_1\frac{e^{3t}}{3}+c_3$

أى أن

(6) $$y=c_1e^{2t}+c_3e^{-t}...$$

بالتعويض من (6)، (4) فى (2) نجد أن

$$2c_1e^{2t}-c_3e^{-t}=c_1e^{2t}+c_2e^{-t}+z.$$
$$z=c_1e^{2t}-c_3e^{-t}-c_2e^{-t}$$

أو

$$z=c_1e^{2t}-c_4e^{-t}$$

مثال(٣)

حل النظام $\frac{d^2x}{dt^2}-3x-4y=0,\frac{d^2y}{dt^2}+x+y=0$

الحل

نفترض أن $D=\frac{d}{dt}$ فيكون لدينا

$$(D^2-3)x-4y=0 \qquad (1) \qquad x+(D^2+1)y=0 \qquad (2)$$

بحذف y من المعادلتين (1)، (2) نحصل على

أى أن $[(D^2+1)(D^2-3)+4]x=0$

(3) $$\left(D^2-1\right)^2x=0$$

وعلى ذلك يكون حل المعادلة (3) هو

(4) $$x=(c_1+c_2t)e^t+(c_3+c_4t)e^{-t}$$

حيث $c_i, i=1,2,3,4$ ثوابت إختيارية.ونحصل من (4) على

$$Dx = c_2e^t + (c_1 + c_2t)e^t + c_4e^{-t} - (c_3 + c_4t)e^{-t}$$
$$= (c_1 + c_2 + c_2t)e^t + (c_4 - c_3 - c_4t)e^{-t}$$

وكذلك

$$D^2x = c_2e^t + (c_1 + c_2 + c_2t)e^t - c_4e^{-t} - (c_4 - c_3 - c_4t)e^{-t}$$

أى أن

$$D^2x = (c_1 + 2c_2 + c_2t)e^t - (2c_4 - c_3 - c_4t)e^{-t} \qquad (5)$$

ومن (1) نجد أن

$$4y = D^2 - 3x \qquad = \qquad (6)$$

وبإستخدام (5)،(6) نجد أن

$$y = \frac{1}{2}\{(c_2 - c_1 - c_2t)e^t - (c_4 + c_3 + c_4t)e^{-t}\} \qquad (7)$$

ويكون حل النظام هو(٤)، (7) .

مثال (٤)

حل النظام

$$\frac{dx}{dt} + 2\frac{dy}{dt} - 2x + 2y = 3e^t \qquad (1)$$

$$3\frac{dx}{dt} + \frac{dy}{dt} + 2x + 2y = 4e^{2t} \qquad (2)$$

الحل

بضرب طرفى المعادلة(2) فى 2 فنحصل على

$$6\frac{dx}{dt} + 2\frac{dy}{dt} + 4x + 2y = 8e^{2t} \qquad (3)$$

بطرح (1) من (3) نحصل على

$$5\frac{dx}{dt}+6x=8e^{2t}-3e^{t}$$

$$\frac{dx}{dt}+\frac{6}{5}x=\frac{8}{5}e^{2t}-\frac{3}{5}e^{t} \qquad (4)$$

وهى معادلة خطية من الرتبة الأولى ويكون عامل التكامل هو

$$e^{\int\frac{6}{5}dt}=e^{\left(\frac{6}{5}\right)t}$$

ويكون حل المعادلة (4) هو

$$xe^{\left(\frac{6}{5}\right)t}=\int\left[\frac{8}{5}e^{\left(\frac{16}{5}\right)t}-\frac{3}{5}e^{\left(\frac{11}{5}\right)t}\right]dt$$

$$=\frac{8}{5}\cdot\frac{5}{16}e^{\left(\frac{16}{5}\right)t}-\frac{3}{5}\cdot\frac{5}{11}e^{\left(\frac{11}{5}\right)t}+c_1$$

$$\therefore x=\frac{1}{2}e^{2t}-\frac{3}{11}e^{t}+c_1e^{-(6/5)t} \qquad (5)$$

وبضرب طرفى المعادلة (1) فى 3 نحصل على

$$3\frac{dx}{dt}+6\frac{dy}{dt}-6x+6y=9e^{t} \qquad (6)$$

وبطرح (2) من (6) نحصل على

$$5\frac{dy}{dt}-8x+5y=9e^{t}-4e^{-t}$$

$$5\frac{dy}{dt}+5y=8x+9e^{t}-4e^{2t}$$

وبالتعويض عن قيمة x من (5) نحصل على

$$5\frac{dy}{dt}+5y=\frac{75}{11}e^{t}+8c_1e^{-(6/5)t}$$

أى

$$\frac{dy}{dt}+y=\frac{15}{11}e^{t}+\frac{8c_1}{5}e^{-(6/5)t} \qquad (7)$$

وهى معادلة خطية من الرتبة الأولى ويكون معامل التكامل هو $e^{\int dt} = e^{t}$ ويكون حل المعادلة (7) على الصورة

$$y = c_2 e^{-t} - 8c_1 e^{(-6/5)t} + \frac{15}{22} e^{t} \tag{8}$$

ويكون حل النظام هو (5)، (8).

مثال(٥)

حل النظام

$$\frac{dx}{dt} + \frac{dy}{dt} - 2y = 2\cos t - 7\sin t$$
$$\frac{dx}{dt} - \frac{dy}{dt} + 2x = 4\cos t - 3\sin t$$

الحل

متروك للطالب ويكون الحل هو

$$x = c_1 e^{\sqrt{2}t} + c_2 e^{-\sqrt{2}t} + 3\cos t, \qquad y = (\sqrt{2}+1)c_1 e^{\sqrt{2}t} + (1-\sqrt{2})c_2 e^{-\sqrt{2}t} + 2\sin t.$$

٢ - الأنظمة الخطية ذوات المعاملات الثابتة

النظام من المعادلات التفاضلية الخطية من الرتبة الأولى ذات المعاملات الثابتة يكون على الصورة

$$\left.\begin{aligned}
\frac{dx_1}{dt} &= a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \ldots + a_{1j}x_j + \ldots + a_{1n}x_n \\
\frac{dx_2}{dt} &= a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \ldots + a_{2j}x_j + \ldots + a_{2n}x_n \\
&\cdot \\
&\cdot \\
\frac{dx_i}{dt} &= a_{i1}x_1 + a_{i2}x_2 + \ldots + a_{ij}x_j + \ldots + a_{in}x_n \\
&\cdot \\
&\cdot \\
\frac{dx_n}{dt} &= a_{n1}x_1 + a_{n2}x_2 + \ldots + a_{nj}x_j + \ldots + a_{nn}x_n
\end{aligned}\right\} \qquad (1)$$

حيث t متغير مستقل بينما $x_1, x_2, \ldots, x_n$ متغيرات تابعة، والمعاملات a_{ij} ثوابت حيث $i, j = 1, 2, \ldots, n$.

ويمكن وضع النظام على (1) الصورة المصفوفية

$$\begin{pmatrix} \frac{dx_1}{dt} \\ \frac{dx_2}{dt} \\ \cdot \\ \cdot \\ \cdot \\ \frac{dx_n}{dt} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdot & \cdot & \cdot & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdot & \cdot & \cdot & a_{2n} \\ \cdot & & & & & \\ \cdot & & & & & \\ \cdot & & & & & \\ \cdot & & & & & \\ \cdot & & & & & \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdot & \cdot & \cdot & a_{nn} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \cdot \\ \cdot \\ \cdot \\ \cdot \\ \cdot \\ x_n \end{pmatrix}$$

أى $\frac{dX}{dt} = AX$

حيث $X=\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ . \\ . \\ . \\ x_n \end{pmatrix}$ ،والمتجه $\begin{pmatrix} \frac{dx_1}{dt} \\ \frac{dx_2}{dt} \\ . \\ . \\ . \\ \frac{dx_n}{dt} \end{pmatrix}=\frac{dX}{dt}$ ،و A هى مصفوفة المعاملات.

ولحل هذا النظام، نفرض الحل $X=Ce^{mt}$ حيث C متجه ثابت و m عدد نريد تحديد قيمته.

بالتعويض فى النظام نجد أن

$Cme^{mt}=ACe^{mt}$ أى $(AC-mC)e^{mt}=0$

ومنها $(A-mI)Ce^{mt}=0$ وحيث إن $e^{mt}\neq 0$ فإن

(1) $$(A-mI)C=0$$

وتسمى المعادلة الذاتية. نختار المتجه $C\neq 0$ فيكون المحدد

(2) $$|A-mI|=0$$

المعادلة(2) تسمى المعادلة المميزة (characteristic-equation) ونحصل منها على قيم m (القيم الذاتية) eigen value ومنها نحصل على حل النظام

بعد تعيين قيم المتجه C المناظرة لقيم m وقد تكون قيم m حقيقيه ومختلفه أوبعضها مكرر أوبعضها أعدادا مركبه ويسمى المتجه C بالمتجه الذاتي (eigenvector)

أ -القيم الذاتيه حقيقيه ومختلفه

مثال (١)

أوجد حل النظام

$$\frac{dx_1}{dt} = x_2$$
$$\frac{dx_2}{dt} = -2x_1 + 3x_2$$

الحل

يمكن وضع النظام على الصورة $X' = AX$ حيث

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -2 & 3 \end{pmatrix}$$

تكون المعادلة المساعدة

$$\left|\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -2 & 3 \end{pmatrix} - m\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}\right| = 0 \Rightarrow \begin{vmatrix} -m & 1 \\ -2 & 3-m \end{vmatrix} = 0 \qquad (1)$$

$$\therefore -3m + m^2 + 2 = 0 \Rightarrow (m-1)(m-2) = 0 \Rightarrow m_1 = 1, m_2 = 2$$

نلاحظ القيم الذاتية 2، 1 حقيقية ومختلفة. وحيث إنه لكل قيمة ذاتيه يوجد متجه ذاتى فإن .

(i) $m_1 = 1$: نعوض فى المعادلة (1) نحصل على

ومنها نجد أن $\begin{pmatrix} -1 & 1 \\ -2 & 2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} c_1 \\ c_2 \end{pmatrix} = 0$

$$-c_1 + c_2 = 0 \Rightarrow c_1 = c_2$$

وإذا إعتبرنا $c_1 = 1$ فإن $c_2 = 1$ و يكون

يكون المتجه الذاتى المناظر عبارة عن مضاعفات $C = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$ ومنها

$$X_1 = b_1\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} e^t$$

(ii) $m_2 = 2$ ، نعوض فى المعادلة (1)

$$\begin{pmatrix} -2 & 1 \\ -2 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} c_1 \\ c_2 \end{pmatrix} = 0 \Rightarrow -2c_1 + = 0 \Rightarrow c_2 = 2c_1$$

وإذا إخترنا $c_1 = 1$ فإن $c_2 = 2$

أى أن المتجه الذاتى المناظر عبارة عن مضاعفات $C = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix}$ أي

$$\therefore X_2 = b_2 \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix} e^{2t}$$

نظرية (١): -

المجموعة المكونة من k متجه من القياس n $\{X_1(t), X_2(t), ..., X_k(t)\}$ تكون مستقلة خطيا إذا كان

$$c_1X_1(t) + c_2X_2(t) + ... + c_kX_k(t) = 0, a < t < b$$

فإن ذلك يستلزم $c_1 = c_2 = ... = c_k = 0$

نظرية (٢): -

إذا كان $X_1(t), X_2(t), ..., X_m(t)$ كل منها حل للنظام الخطى المتجانس $X' = AX$ فإن $c_1X_1(t) + c_2X_2(t) + ... + c_mX_m(t)$ حل لنفس النظام للثوابت الإختيارية $c_1, c_2, ..., c_m$.

نظرية (٣): -

إذا كانت A مصفوفة $n \times n$ من الأعداد الحقيقية وكانت $\{X_1(t), X_2(t), ..., X_n(t)\}$ مجموعة الحلول المستقلة خطيا للنظام $X' = AX$ ، $a < t < b$ فإن الحل المكون من حلول هذه المجموعة كلها يكون وحيدا ويسمى الحل العام.

ويسمى المحدد $|X_1(t)X_2(t)...X_n(t)|$ بالرونسكيان (Wronskian) لمجموعة متجهات الحل.

نظرية (٤): -

تكون مجموعة المتجهات الرأسيه $\{X_1(t), X_2(t), ..., X_n(t)\}$ مستقلة خطيا عند $t = t_0$ إذا وإذا كان فقط الرونسكيان لايساوى الصفر عند أى نقطة ولتكن $t = t_0$ أى إذا كان

$$W\{X_1(t_0), X_2(t_0), ..., X_n(t_0)\} = |X_1(t_0)...X_n(t_0)| \neq 0.$$

نظرية (٥): -

إذا كانت $X_1(t), X_2(t), ..., X_n(t)$ حلول مستقلة خطيا للنظام من المقياس n المتجانس $X' = AX$ فى الفترة $a < t < b$ وإذا كانت $X_p(t)$ أى حل للنظام غير المتجانس $X' = AX + B(t)$ المناظر فى نفس الفترة، فإن أى حل لذلك النظام يمكن كتابته على الصورة

$$X(t) = c_1X_1(t) + ... + c_nX_n(t) + X_p(t)$$

حيث $c_1, c_2, ..., c_n$ ثوابت.

من المثال السابق، إذا إخترنا

$$b_1 = b_2 = 1$$

$$\therefore W\{X_1, X_2\} = \begin{vmatrix} e^t & e^{2t} \\ e^t & 2e^{2t} \end{vmatrix} = 2e^{3t} - e^{3t} = e^{3t} \neq 0$$

$\therefore X_1(t), X_2(t)$ مستقلة خطياويكون الحل العام للنظام

$$X(t) = c_1\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}e^t + c_2\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix}e^{2t}$$

مثال (٢)

أوجد الحل العام للنظام

$$\frac{dx_1}{dt} = 4x_1 - x_2$$
$$\frac{dx_2}{dt} = -4x_1 + 4x_2$$

الحل

يمكن وضع النظام على الصورة

$$\begin{pmatrix} \frac{dx_1}{dt} \\ \frac{dx_2}{dt} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4 & -1 \\ -4 & 4 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix}$$

أى $X' = AX$

حيث
$$A = \begin{pmatrix} 4 & -1 \\ -4 & 4 \end{pmatrix}$$

وتكون المعادلة المميزة هي

$$\begin{vmatrix} 4-m & -1 \\ -4 & 4-m \end{vmatrix} = 0 \Rightarrow 16 - 8m + m^2 - 4 = 0$$
$$\therefore m^2 - 8m + 12 = 0 \Rightarrow (m-2)(m-6) = 0$$

و تكون القيم الذاتية هى $m_1 = 2, m_2 = 6$

١) $m_1 = 2$: بالتعويض فى المعادلة الذاتية

$$\begin{pmatrix} 2 & -1 \\ -4 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} c_1 \\ c_2 \end{pmatrix} = 0 \Rightarrow 2c_1 - c_2 = 0 \Rightarrow c_2 = 2c_1$$

نختار $c_1 = 1$ فيكون $c_2 = 2$

على ذلك فإن
$$X_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix} e^{2t}$$

٢) $m_2 = 6$ بالتعويض فى المعادلة الذاتية

$$\begin{pmatrix} -2 & -1 \\ -4 & -2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} c_1 \\ c_2 \end{pmatrix} = 0 \Rightarrow -2c_1 - c_2 = 0 \Rightarrow c_2 = -2c_1$$

نختار $c_1 = 1$ فإن $c_2 = -2$ ، فيكون الحل هو

$$X_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \end{pmatrix} e^{6t}$$

و حيث أن الرونسكيان

$$W\{X_1, X_2\} = \begin{vmatrix} e^{2t} & e^{6t} \\ 2e^{2t} & 6e^{6t} \end{vmatrix} = -4e^{8t} \neq 0$$

أى أن X_1, X_2 مستقلان خطيا

ويكون الحل العام

$$X(t) = c_1 \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix} e^{2t} + c_2 \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \end{pmatrix} e^{6t}$$

مثال(٣)

أوجد حل النظام $X' = AX$

حيث

$$A = \begin{pmatrix} 1 & -1 & -1 \\ 0 & 1 & 3 \\ 0 & 3 & 1 \end{pmatrix}$$

الحل

كما سبق تكون المعادلة المميزة هى

$$\begin{vmatrix} 1-m & -1 & -1 \\ 0 & 1-m & 3 \\ 0 & 3 & 1-m \end{vmatrix} = 0$$

$$\therefore (1-m)[(1-m)^2 - 9] = 0 \Rightarrow (1-m)(m^2 - 2m - 8) = 0$$

$$\therefore (m-1)(m-4)(m+2) = 0$$

$$m_1 = 1, m_2 = 4, m_3 = -2.$$

١) $m_1 = 1$: بالتعويض فى المعادلة الذاتية $(A - mI)\, c = 0$ نحصل على

$$\begin{pmatrix} 0 & -1 & -1 \\ 0 & 0 & 3 \\ 0 & 3 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} c_1 \\ c_2 \\ c_3 \end{pmatrix} = 0 \Rightarrow c_2 + c_3 = 0, c_3 = 0, c_2 = 0$$

$\therefore$ c_1 فقط إختيارية

$\therefore$ نختار $c_1 = 1$ فيكون الحل هو

$$X_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} e^t$$

٢) $m_2 = 4$: بالتعويض فى المعادلة الذاتية نحصل على

$$\begin{pmatrix} -3 & -1 & -1 \\ 0 & -3 & 3 \\ 0 & 3 & -3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} c_1 \\ c_2 \\ c_3 \end{pmatrix} = 0 \qquad \therefore 3c_1 + c_2 + c_3 = 0, -c_2 + c_3 = 0$$

$$\therefore c_3 = c_2 \Rightarrow 3c_1 = -2c_2$$

نفرض $c_2 = 3 \Leftarrow c_3 = 3 \Leftarrow c_1 = -2$ فيكون الحل هو

$$X_2 = \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \\ 3 \end{pmatrix} e^{4t}$$

٣) $m_3 = -2$: بالتعويض فى المعادلة الذاتية

$$\begin{pmatrix} 3 & -1 & -1 \\ 0 & 3 & 3 \\ 0 & 3 & 3 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} c_1 \\ c_2 \\ c_3 \end{pmatrix} = 0 \qquad \therefore 3c_1 - c_2 - c_3 = 0, c_2 + c_3 = 0$$

$$\therefore c_1 = 0$$

نختار $c_2 = 1$ ⇐ $c_3 = -1$ فيكون الحل هو

$$X_3 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix} e^{-2t}$$

نوجد محدد الرونسكيان عند $t = 0$

$$W\{X_1(0), X_2(0), X_3(0)\} = \begin{vmatrix} 1 & -2 & 0 \\ 0 & 3 & 1 \\ 0 & 3 & -1 \end{vmatrix} = -6 \neq 0$$

∴ الحلول مستقلة خطيا ويكون الحل العام هو

$$X(t) = c_1\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} e^{t} + c_2\begin{pmatrix} -2 \\ 3 \\ 3 \end{pmatrix} e^{4t} + c_3\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix} e^{-2t}$$

تمارين

أوجد الحل العام للنظام $X' = AX$ للمصفوفة المعطاه

$$1)A = \begin{pmatrix} 8 & -3 \\ 16 & -8 \end{pmatrix} \qquad 2)A = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ -2 & 2 \end{pmatrix}$$

$$3)A = \begin{pmatrix} 4 & 3 \\ -4 & -4 \end{pmatrix} \qquad 4)A = \begin{pmatrix} 3 & 3 \\ -1 & -1 \end{pmatrix}$$

$$5)A = \begin{pmatrix} 2 & 3 \\ 1 & -2 \end{pmatrix} \qquad 6)A = \begin{pmatrix} 12 & -15 \\ 4 & -4 \end{pmatrix}$$

$$7)A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & -1 \\ 0 & -1 & 3 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix} \qquad 8)A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & -1 \\ 2 & 1 & 1 \\ -1 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

ب - القيم الذاتية أعداد مركبة : -

فى الجزء السابق نلاحظ أننا عرضنا للحالات التى تحتوى قيم ذاتية عبارة عن أعداد حقيقية فقط ولم نتعرض للقيم الذاتية المركبة ، والآن نعرض للمثال التالى.

مثال(٤)

أوجد حل النظام

$$\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}' = \begin{pmatrix} 2 & -5 \\ 2 & -4 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$$

الحل

نوجد المعادلة المميزة

$$\begin{vmatrix} 2-m & -5 \\ 2 & -4-m \end{vmatrix} = 0$$

$$\therefore m^2 + 2m + 2 = 0$$

$$\therefore m = \frac{-2 \pm \sqrt{4-8}}{2} = 1 \pm i$$

١) $m_1 = 1 + i$

بالتعويض فى المعادلة الذاتية

$$\begin{pmatrix} 3-i & -5 \\ 2 & -3-i \end{pmatrix}\begin{pmatrix} c_1 \\ c_2 \end{pmatrix} = 0 \qquad \therefore (3-i)c_1 = 5c_2$$

$$\therefore c_2 = \frac{3-i}{5} c_1$$

بإختيار $c_1 = 5$ فإن $c_2 = 3 - i$ ويكون الحل هو

$$X_1 = \begin{pmatrix} 5 \\ 3-i \end{pmatrix} e^{(-1+i)t}$$

٢) $m_2 = 1 - i$

بالتعويض فى المعادلة الذاتية نحصل على

$$\begin{pmatrix} 3+i & -5 \\ 2 & -3+i \end{pmatrix}\begin{pmatrix} c_1 \\ c_2 \end{pmatrix} = 0 \Rightarrow (3+i)c_1 = 5c_2$$

$$\therefore c_2 = \frac{3+i}{5} c_1$$

بإختيار $c_1 = 5$ فإن $c_2 = 3 + i$ ويكون الحل هو

$$X_2 = \begin{pmatrix} 5 \\ 3+i \end{pmatrix} e^{-(1+i)t}$$

وبذلك نحصل على الحل العام

$$X = c_1 \begin{pmatrix} 5 \\ 3-i \end{pmatrix} e^{(-1+i)t} + c_2 \begin{pmatrix} 5 \\ 3+i \end{pmatrix} e^{-(1+i)t}$$

لكننا نعلم أن $e^{(a+ib)t} = e^{at}(\cos bt + i \sin bt)$

ومن ذلك فإن

$$X = c_1 \begin{pmatrix} 5 \\ 3-i \end{pmatrix} e^{-t}(\cos t + i \sin t) + c_2 \begin{pmatrix} 5 \\ 3+i \end{pmatrix} e^{-t}(\cos t - i \sin t)$$

$$= e^{-t}\left[(c_1 + c_2) \begin{pmatrix} 5\cos t \\ 3\cos t + \sin t \end{pmatrix} + i(c_1 - c_2) \begin{pmatrix} 5\sin t \\ -\cos t + 3\sin t \end{pmatrix} \right]$$

بفرض $c_1 + c_2 = b_1 , i(c_1 - c_2) = b_2$

$$\therefore X = e^{-t}\left[b_1 \left\{ \begin{pmatrix} 5 \\ 3 \end{pmatrix} \cos t - \begin{pmatrix} 0 \\ -1 \end{pmatrix} \sin t \right\} + b_2 \left\{ \begin{pmatrix} 0 \\ -1 \end{pmatrix} \cos t + \begin{pmatrix} 5 \\ 3 \end{pmatrix} \sin t \right\} \right]$$

ملحوظة: الحل السابق يمثل الحل العام وذلك لأن $W \neq 0$ ، بوضع $t = 0$

$$\therefore W(0) = \begin{vmatrix} 5 & 0 \\ 3 & -1 \end{vmatrix} = -5 \neq 0$$

$\therefore$ الحلان (معاملا b_1, b_2) مستقلان.

ملحوظات هامة على المثال: -

١) إذا وجدت قيمة ذاتية عبارة عن عدد مركب فإنه توجد قيمة أخرى هى العدد المرافق.

٢) المتجهات الذاتية توجد أيضا على صورة أعداد مركبة ومرافقها.

٣) المتجه الذاتى الأول

$$B = \begin{pmatrix} 5 + i0 \\ 3 - i1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 5 \\ 3 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 \\ -1 \end{pmatrix} i = \operatorname{Re} B + i \operatorname{Im} B$$

أى أن حل المثال السابق فى الصورة العامة

$$X = e^{-t}\left[b_1\{\operatorname{Re}B\cos t - \operatorname{Im}B\sin t\} + b_2\{\operatorname{Im}B\cos t + \operatorname{Re}B\sin t\}\right]$$

٤) الرونسكيان فى هذه الحالة عند $t=0$ يعطى من العلاقة

$.W(0) = |\operatorname{Re}B, \operatorname{Im}B|$

مثال(٥)

أوجد حل النظام

$$\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}' = \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ -4 & 2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$$

الحل

تكون المعادلة المميزة

$$\begin{vmatrix} 2-m & -1 \\ -4 & 2-m \end{vmatrix} = 0 \qquad \therefore m^2 - 4m + 8 = 0$$

$$\therefore (m-2)^2 = -4 \Rightarrow m = 2 \pm 2i$$

$$m_1 = 2+2i, m_2 = 2-2i$$

(١) $m_1 = 2+2i$

بالتعويض فى المعادلة الذاتية

$$\begin{pmatrix} -2i & 1 \\ -4 & -2i \end{pmatrix}\begin{pmatrix} c_1 \\ c_2 \end{pmatrix} = 0$$

$$\therefore -2ic_1 + c_2 = 0 \Rightarrow c_2 = 2ic_1$$

باختيار $c_1 = 1$ فإن $c_2 = 2i$ ،

فيكون $B = \begin{pmatrix} 1 \\ 2i \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 \\ 2 \end{pmatrix} i$

الرونسكيان عند $t=0$ هو $W(0) = \begin{vmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 2 \end{vmatrix} = 2 \neq 0$

أى أن الحل العام

$$X = e^{2t}\left[b_1\left\{\begin{pmatrix}1\\0\end{pmatrix}\cos 2t-\begin{pmatrix}0\\2\end{pmatrix}\sin 2t\right\}+b_2\left\{\begin{pmatrix}0\\2\end{pmatrix}\cos 2t+\begin{pmatrix}1\\0\end{pmatrix}\sin 2t\right\}\right].$$

مثال(٦)

أوجد حل النظام $X' = AX$

حيث
$$A=\begin{pmatrix}1 & 2 & -1\\ 0 & 1 & 1\\ 0 & -1 & 1\end{pmatrix}$$

الحل

تكون المعادلة المميزة هى

$$\begin{vmatrix}1-m & 2 & -1\\ 0 & 1-m & 1\\ 0 & -1 & 1-m\end{vmatrix}=0$$

$$\therefore (1-m)\left[(1-m)^2+1\right]=0$$

$$\therefore (1-m)(m^2-2m+2)=0$$

$$\therefore m_1=1, m_2=1+i, m_3=1-i.$$

١) $m_1=1$ ، بالتعويض فى المعادلة الذاتية

$$\begin{pmatrix}0 & 2 & -1\\ 0 & 0 & 1\\ 0 & -1 & 0\end{pmatrix}\begin{pmatrix}c_1\\ c_2\\ c_3\end{pmatrix}=0$$

$$c_2=c_3=0$$

نختار $c_1=1$

$\therefore$ المتجة الذاتى المناظر يكون $\begin{pmatrix}1\\0\\0\end{pmatrix}$ أى أن

$$X_1=\begin{pmatrix}1\\0\\0\end{pmatrix}e^t$$

٢) $m_2=1+i$:بالتعويض فى المعادلة الذاتية

$$\begin{pmatrix}-i & 2 & -1\\0 & -i & 1\\0 & -1 & -i\end{pmatrix}\begin{pmatrix}c_1\\c_2\\c_3\end{pmatrix}=0$$

$$\therefore -ic_1+2c_2-c_3=0$$

$$-ic_2+c_3=0 \Rightarrow c_3=ic_2$$

$$-c_2-ic_3=0$$

نختار $c_2=i$ فإن $c_3=-1$

$$\therefore -ic_1+2i+1=0 \Rightarrow c_1=2-i$$

$\therefore$ المتجه الذاتى المناظر

$$B=\begin{pmatrix}2-i\\i\\-1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}2\\0\\-1\end{pmatrix}+i\begin{pmatrix}-1\\1\\0\end{pmatrix}$$

ويتم حساب $W(0)$ كما يلى

$$W(0)=\begin{vmatrix}1 & 2 & -1\\0 & 0 & 1\\0 & -1 & 0\end{vmatrix}=1\neq 0$$

$$\therefore X = b_1\begin{pmatrix}1\\0\\0\end{pmatrix}e^t + e^t\left[b_2\left\{\begin{pmatrix}2\\0\\-1\end{pmatrix}\cos t - \begin{pmatrix}-1\\1\\0\end{pmatrix}\sin t\right\} + b_3\left\{\begin{pmatrix}-1\\1\\0\end{pmatrix}\cos t + \begin{pmatrix}2\\0\\-1\end{pmatrix}\sin t\right\}\right].$$

تمارين

أوجد الحل العام للنظام $X' = AX$ لكل مصفوفة A :

1) $A = \begin{pmatrix}4 & 5\\ -4 & -4\end{pmatrix}$ 2) $A = \begin{pmatrix}4 & 1\\ -8 & 8\end{pmatrix}$

3) $A = \begin{pmatrix}4 & -13\\ 2 & -6\end{pmatrix}$ 4) $A = \begin{pmatrix}3 & 5\\ -1 & -1\end{pmatrix}$

5) $A = \begin{pmatrix}12 & -17\\ 4 & -4\end{pmatrix}$ 6) $A = \begin{pmatrix}8 & -5\\ 16 & -8\end{pmatrix}$

7) $A = \begin{pmatrix}1 & 0 & 0\\ 2 & 1 & -2\\ 3 & 2 & 1\end{pmatrix}.$

ج -القيم الذاتية مكررة : -

الآن سوف نعرض مثالا بحيث تكون القيم الذاتية مكررة

مثال(٧)

أوجد حل النظام $X' = AX$

حيث $A = \begin{pmatrix}0 & 1\\ -4 & 4\end{pmatrix}$

الحل

المعادلة المميزه هى

$$\begin{vmatrix} -m & 1 \\ -4 & 4-m \end{vmatrix} = 0 \Rightarrow m^2 - 4m + 4 = 0$$

$$\therefore (m-2)^2 = 0 \Rightarrow m_1 = m_2 = 2$$

١) $m_1 = 2$ بالتعويض فى المعادلة الذاتية نحصل على

$$\begin{pmatrix} -2 & 1 \\ -4 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} c_1 \\ c_2 \end{pmatrix} = 0 \qquad \therefore -2c_1 + c_2 = 0$$

بإختيار $c_1 = 1$ نجد أن $c_2 = 2$ ،فيكون الحل هو

$$X_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix} e^{2t}.$$

حيث إن القيمة الذاتية $m = 2$ مكررة

∴نفترض أن الحل الثانى المناظر يكون

$$X_2 = \begin{pmatrix} c_1 \\ c_2 \end{pmatrix} te^{2t}$$

أو بفرض آخر

$$(A) \qquad X_2 = \begin{pmatrix} c_1(t) \\ c_2(t) \end{pmatrix} e^{2t}$$

حيث إن X_2 حل، فهو يحقق النظام، بالتعويض فى النظام، نجد أن

$$\begin{pmatrix} c_1(t) \\ c_2(t) \end{pmatrix} 2e^{2t} + \begin{pmatrix} c_1' \\ c_2' \end{pmatrix} e^{2t} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -4 & 4 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} c_1(t) \\ c_2(t) \end{pmatrix} e^{2t}.$$

أى أن

$$\begin{pmatrix} c_1'(t) \\ c_2'(t) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -2 & 1 \\ -4 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} c_1(t) \\ c_2(t) \end{pmatrix}$$

$$\therefore \left.\begin{aligned} c_1'(t) &= -2c_1(t) + c_2(t), \\ c_2'(t) &= -4c_1(t) + 2c_2(t) \end{aligned}\right\} \quad (1)$$

بالتكامل نحصل على

$c_2(t) = 2c_1(t) + a$ حيث a ثابت إختيارى

من (1) (المعادلة الأولى)

$c_1'(t) = a \Rightarrow c_1(t) = at + b$ حيث b ثابت إختيارى

$$\therefore c_2(t) = 2at + 2b + a.$$

ومن ذلك نستنتج أن

$$X_2 = \begin{pmatrix} at+b \\ 2at+2b+a \end{pmatrix} e^{2t}$$

$$= \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix} ate^{2t} + \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix} be^{2t} + \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} ae^{2t}.$$

إذا إخترنا $a = 0, b = 1$ نحصل على الحل X_1

أما إذا إخترنا $a = 1, b = 0$ نحصل على

$$X_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix} te^{2t} + \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} e^{2t}.$$

عند $t = 0$ نجد أن

$$W\{X_1(0), X_2(0)\} = \begin{vmatrix} 1 & 0 \\ 2 & 1 \end{vmatrix} = -1 \neq 0.$$

على ذلك فإن الحل العام للنظام يكون على الصورة

$$X = c_1 \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix} e^{2t} + c_2 \left[\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix} te^{2t} + \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} e^{2t} \right]$$

بالنظر إلى المثال السابق وجدنا أننا فرضنا الحل الثانى X_2 على صورة المعادلة A ومن ذلك يمكننا من إيجاد الحل الثانى فى حالة وجود قيمة مكررة للقيمة الذاتية، الآن سنحاول من خلال المثال التالى والإستعانه بالمثال السابق من إستنتاج صيغة سهلة للحل الثانى X_2.

مثال(٨)

أوجد حل النظام

$$\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}' = \begin{pmatrix} 8 & -1 \\ 4 & 12 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \dots \qquad (1)$$

الحل

تكون المعادلة المميزة هى

$$\begin{vmatrix} 8-m & -1 \\ 4 & 12-m \end{vmatrix} = 0$$

$$\therefore m^2 - 20m + 100 = 0$$

$$\therefore (m-10)^2 = 0 \Rightarrow m_1 = m_2 = 10$$

بالتعويض فى المعادلة الذاتية

$$\begin{pmatrix} -2 & -1 \\ 4 & 2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} c_1 \\ c_2 \end{pmatrix} = 0$$

$$\therefore -2c_1 - c_2 = 0 \Rightarrow c_2 = -2c_1$$

نختار $c_1 = 1 \Leftarrow c_2 = -2$، يكون الحل هو

$$X_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \end{pmatrix} e^{10t}.$$

بالإستعانه بالمثال السابق فإن X_2 تأخذ الصورة

$$X_2=\begin{pmatrix}1\\-2\end{pmatrix}te^{10t}+\begin{pmatrix}c_3\\c_4\end{pmatrix}e^{10t}\ldots \qquad (2)$$

بالتعويض من(2) فى (1)

$$\cdot\cdot\begin{pmatrix}1\\-2\end{pmatrix}10te^{10t}+\begin{pmatrix}1\\-2\end{pmatrix}e^{10t}+\begin{pmatrix}c_3\\c_4\end{pmatrix}10e^{10t}=\begin{pmatrix}8&-1\\4&12\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1\\-2\end{pmatrix}te^{10t}+\begin{pmatrix}8&-1\\4&12\end{pmatrix}\begin{pmatrix}c_3\\c_4\end{pmatrix}e^{10t}$$

نجد أن الحدين المشتملين على te^{10t} يحذفا ، وعلى ذلك

$$\begin{pmatrix}-2&-1\\4&2\end{pmatrix}\begin{pmatrix}c_3\\c_4\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1\\-2\end{pmatrix}\Rightarrow -2c_3-c_4=1$$

نفرض $c_3=0$ فإن $c_4=-1$

على ذلك فإن

$$X_2=\begin{pmatrix}1\\-2\end{pmatrix}te^{10t}+\begin{pmatrix}0\\-1\end{pmatrix}e^{10t}\ldots \qquad (3)$$

يكون الحل الثانى للنظام . وعلى ذلك يكون الحل العام للنظام هو

$$X=c_1\begin{pmatrix}1\\-2\end{pmatrix}e^{10t}+c_2e^{10t}\left[\begin{pmatrix}1\\-2\end{pmatrix}t+\begin{pmatrix}0\\-1\end{pmatrix}\right].$$

مثال(٩)

أوجد حل النظام

$$\left.\begin{aligned}&D^2y+(D-1)v=0,\\&(2D-1)y+(D-1)w=0,\\&(D+3)y+(D-4)v+3w=0.\end{aligned}\right\} \qquad ;D=\frac{d}{dt}.$$

الحل

نلاحظ من المعادلة الأولى فى النظام أنها من الرتبة الثانية فى y .

نحول المعادلات جميعها إلى الرتبة الأولى .

نفترض أن $D^2y = Du \Leftarrow Dy = u$

يصبح النظام على الصورة

$$\begin{aligned}
Du &= u - 3v + 3w + 3y,\\
Dv &= -u + 4v - 3w - 3y,\\
Dw &= -2u \qquad + w + y,\\
Dy &= u
\end{aligned}$$

$\therefore$ المعادلة المميزة

$$\begin{vmatrix} 1-m & -3 & 3 & 3\\ -1 & 4-m & -3 & -3\\ -2 & 0 & 1-m & 1\\ 1 & 0 & 0 & -m \end{vmatrix} = 0$$

أى أن

$$-[-3(-3+3-3m)-(4-m)(3-3+3m)]-m[-2(9-12+3m)$$
$$+(1-m)(4-5m^2+m^2-3)]=0$$
$$\therefore -[9m-(4-m)3m]-m[6(1-m)+(1-m)(m^2-5m+1)]=0$$
$$\therefore -3m[m-1]+m(m-1)[m^2-5m+7]=0$$
$$\therefore m(m-1)[m^2-5m+4]=0 \Rightarrow m(m-4)(m-1)^2=0.$$

$\therefore$ القيم الذاتية $m_1 = 0, m_2 = +4, m_3 = m_4 = 1$

١) $m_1 = 0$: بالتعويض فى المعادلة الذاتية

$$\begin{pmatrix} 1 & -3 & 3 & 3 \\ -1 & 4 & -3 & -3 \\ -2 & 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} c_1 \\ c_2 \\ c_3 \\ c_4 \end{pmatrix}=0$$

$$\therefore c_1=0, c_3+c_4=0, c_4=1, c_3=-1.$$

$$c_1-3c_2+3c_3+3c_4=0 \Rightarrow c_2=0.$$

و يكون الحل هو

$$X_1=\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix}e^{0t}=\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

٢) $m_2=4$:

$$\begin{pmatrix} -3 & -3 & 3 & 3 \\ -1 & 0 & -3 & -3 \\ -2 & 0 & -3 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & -4 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} c_1 \\ c_2 \\ c_3 \\ c_4 \end{pmatrix}=0$$

$$-c_1-c_2+c_3+c_4=0$$

$$-c_1 \qquad -3c_3-3c_4=0$$

$$-2c_1 \qquad -3c_3+c_4=0$$

$$c_1 \qquad\qquad -4c_4=0$$

$$\therefore c_1=4c_4, 3c_3=-7c_4, 3c_2=-16c_4.$$

باختيار $c_1=12, c_2=-16, c_3=-7 \Leftarrow c_4=3$

$$\therefore X_2 = \begin{pmatrix} 12 \\ -16 \\ -7 \\ 3 \end{pmatrix} e^{4t}.$$

٣) $m_3 = 1$:

$$\begin{pmatrix} 0 & -3 & 3 & 3 \\ -1 & 3 & -3 & -3 \\ -2 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} c_1 \\ c_2 \\ c_3 \\ c_4 \end{pmatrix} = 0$$

$$\therefore \quad -c_2 + c_3 + c_4 = 0$$

$$-c_1 + 3[c_2 - c_3 - c_4] = 0 \Rightarrow c_1 = 0.$$

$$-2c_1 \qquad + c_4 = 0 \Rightarrow c_4 = 0.$$

$\therefore c_3 = c_2 \Rightarrow c_2 = 1 = c_3$ ويكون الحل هو

$$X_3 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} e^{t}.$$

وحيث أن $m_3 = m_4 = 1$ جذر مكرر فنفرض أن

$$X_4 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} te^{t} + \begin{pmatrix} c_1 \\ c_2 \\ c_3 \\ c_4 \end{pmatrix} e^{t}.$$

بالتعويض فى النظام نجد أن

$$\begin{pmatrix} c_1 \\ c_2 \\ c_3 \\ c_4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix} \Rightarrow X_4 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} te^t + \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix} e^t$$

وأخيرا ، فإن حل النظام هو

$$\begin{pmatrix} v \\ w \\ y \end{pmatrix} = c_1 \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} e^t + c_2 \left[\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} te^t + \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix} e^t \right] + c_3 \begin{pmatrix} 0 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix} + c_4 \begin{pmatrix} 16 \\ -7 \\ 3 \end{pmatrix} e^{4t}.$$

تمارين

أوجد حل النظام $X' = AX$ حيث

1. $A = \begin{pmatrix} 4 & 1 \\ -4 & 8 \end{pmatrix}$ 2. $A = \begin{pmatrix} 4 & -9 \\ 4 & -8 \end{pmatrix}$

3. $A = \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ 4 & 6 \end{pmatrix}$ 4. $A = \begin{pmatrix} 1 & -2 \\ 2 & -3 \end{pmatrix}$

5. $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & -1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}$ 6. $A = \begin{pmatrix} 2 & 1 & -1 \\ 0 & -1 & 2 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}$

٧ -بفرض النظام $X' = AX$ حيث $A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$

أ) إثبت أن المعادلة المميزة للمصفوفة A لها جذران مكرران فقط إذا كان $(a-d)^2 + 4bc = 0$

ب) إثبت إذا كان $a \neq d$ وإذا كان $(a-d)^2 + 4bc = 0$ فإن حل النظام يكون

$$X = c_1\begin{pmatrix}2b\\ d-a\end{pmatrix}e^{\frac{1}{2}(a+d)t} + c_2\left[\begin{pmatrix}2b\\ d-a\end{pmatrix}t + \begin{pmatrix}0\\ 2\end{pmatrix}\right]e^{\frac{1}{2}(a+d)t}$$

ج) ناقش الحل فى حالة $(a-d)^2 + 4bc = 0$ و $a = d$.

٣ - الأنظمة الخطية غير المتجانسة : -

نفترض أنه لدينا النظام

$$X' = AX + B \qquad (1)$$

حيث A مصفوفة ثابتة $n\times n$ و B دالة متجه فى t .

من نظرية سابقة ذكر أن حل النظام (1) يحتاج إلى حل خاص X_p بالإضافة إلى حل نظام المعادلات المتجانسة المناظر. سوف نستخدم طريقة تغيير البارامترات لحساب الحل الخاص X_p.

مثال (١)

أوجد الحل العام للنظام

$$\begin{pmatrix}x\\ y\end{pmatrix}' = \begin{pmatrix}0 & 1\\ -2 & 3\end{pmatrix}\begin{pmatrix}x\\ y\end{pmatrix} + \begin{pmatrix}f(t)\\ g(t)\end{pmatrix} \qquad (2)$$

الحل

لقد سبق لنا فى مثال متقدم إيجاد حل النظام

$$\begin{pmatrix}x\\ y\end{pmatrix}' = \begin{pmatrix}0 & 1\\ -2 & 3\end{pmatrix}\begin{pmatrix}x\\ y\end{pmatrix} \qquad (3)$$

وكان

$$\begin{pmatrix}x\\ y\end{pmatrix}_H = a_1\begin{pmatrix}1\\ 1\end{pmatrix}e^{t} + a_2\begin{pmatrix}1\\ 2\end{pmatrix}e^{2t} \qquad (4)$$

حيث a_1, a_2 ثابتان إختياريان

نفترض أن الحل الخاص للنظام (2)

$$\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}_p = a_1(t)\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}e^{t} + a_2(t)\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix}e^{2t} \tag{5}$$

بالتعويض المباشر فى (2) نحصل على

$$a_1(t)\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}e^{t} + 2a_2(t)\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix}e^{2t} + a_1'(t)\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}e^{t} + a_2'(t)\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix}e^{2t}$$

$$= \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -2 & 3 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}a_1(t)e^{t} + \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -2 & 3 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix}a_2(t)e^{2t} + \begin{pmatrix} f(t) \\ g(t) \end{pmatrix}, \dots \tag{6}$$

وبالإختصار، نجد أن

$$a_1'(t)\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}e^{t} + a_2'(t)\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix}e^{2t} = \begin{pmatrix} f(t) \\ g(t) \end{pmatrix}. \tag{7}$$

$$\therefore \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} a_1'(t)e^{t} \\ a_2'(t)e^{2t} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} f(t) \\ g(t) \end{pmatrix}$$

بإستخدام قاعدة كرامر، نجد أن

$$a_1'(t)e^{t} = \frac{\begin{vmatrix} f(t) & 1 \\ g(t) & 2 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 2 \end{vmatrix}} = 2f(t) - g(t).$$

$$a_2'(t)e^{2t} = \frac{\begin{vmatrix} 1 & f(t) \\ 1 & g(t) \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 2 \end{vmatrix}} = g(t) - f(t).$$

$$\therefore a_1'(t) = [2f(t) - g(t)]e^{-t} \Rightarrow a_1(t) = \int [2f(t) - g(t)]e^{-t}dt$$

$$a_2'(t) = [g(t) - f(t)]e^{-2t} \Rightarrow a_2(t) = \int [g(t) - f(t)]e^{-2t}dt$$

وعلى سبيل المثال، بفرض $f(t)=e^t, g(t)=1$

$$\therefore a_1(t)=\int[2e^t-1]e^{-t}dt=2t+e^{-t}$$

$$a_2(t)=\int[1-e^t]e^{-2t}dt=-\frac{1}{2}e^{-2t}+e^{-t}.$$

فيكون الحل الخاص

$$\begin{pmatrix}x\\y\end{pmatrix}_p=(2t+e^{-t})\begin{pmatrix}1\\1\end{pmatrix}e^t+(-\frac{1}{2}e^{-2t}+e^{-t})\begin{pmatrix}1\\2\end{pmatrix}e^{2t}$$

أو

$$X_p=(2te^t+1)\begin{pmatrix}1\\1\end{pmatrix}+(e^t-\frac{1}{2})\begin{pmatrix}1\\2\end{pmatrix}.$$

ويكون الحل العام هو

$$X=(a_1e^t+2te^t+1)\begin{pmatrix}1\\1\end{pmatrix}+(a_2e^{2t}+e^t-\frac{1}{2})\begin{pmatrix}1\\2\end{pmatrix}.$$

مثال(٢)

أوجد حل النظام $X'=AX+B$

حيث
$$A=\begin{pmatrix}2&1\\-4&2\end{pmatrix}, B=\begin{pmatrix}3e^{2t}\\te^{2t}\end{pmatrix}$$

الحل

لقد سبق لنا الحصول على حل النظام المناظر

$$X'=AX$$

وكان

$$X_H=e^{2t}\left[b_1\left\{\begin{pmatrix}1\\0\end{pmatrix}\cos 2t-\begin{pmatrix}0\\2\end{pmatrix}\sin 2t\right\}+b_2\left\{\begin{pmatrix}0\\2\end{pmatrix}\cos 2t+\begin{pmatrix}1\\0\end{pmatrix}\sin 2t\right\}\right].$$

حيث b_1, b_2 ثابتان إختياريان

نفرض أن الحل الخاص هو

$$X_P = e^{2t}\left[b_1(t)\left\{\begin{pmatrix}1\\0\end{pmatrix}\cos 2t - \begin{pmatrix}0\\2\end{pmatrix}\sin 2t\right\} + b_2(t)\left\{\begin{pmatrix}0\\2\end{pmatrix}\cos 2t + \begin{pmatrix}1\\0\end{pmatrix}\sin 2t\right\}\right].$$

بالتعويض فى المعادلة عن X بالحل X_P المفروض، نجد أن

$$e^{2t}\left[b_1(t)\left\{-2\begin{pmatrix}1\\0\end{pmatrix}\sin 2t - 2\begin{pmatrix}0\\2\end{pmatrix}\cos 2t\right\} + b_2(t)\left\{-2\begin{pmatrix}0\\2\end{pmatrix}\sin 2t + 2\begin{pmatrix}1\\0\end{pmatrix}\cos 2t\right\}\right.$$

$$\left.+b_1'(t)\left\{\begin{pmatrix}1\\0\end{pmatrix}\cos 2t - \begin{pmatrix}0\\2\end{pmatrix}\sin 2t\right\} + b_2'(t)\left\{\begin{pmatrix}0\\2\end{pmatrix}\cos 2t + \begin{pmatrix}1\\0\end{pmatrix}\sin 2t\right\}\right]$$

$$+2e^{2t}\left[b_1(t)\left\{\begin{pmatrix}1\\0\end{pmatrix}\cos 2t - \begin{pmatrix}0\\2\end{pmatrix}\sin 2t\right\} + b_2(t)\left\{\begin{pmatrix}0\\2\end{pmatrix}\cos 2t + \begin{pmatrix}1\\0\end{pmatrix}\sin 2t\right\}\right]$$

$$=\begin{pmatrix}2 & 1\\-4 & 2\end{pmatrix}e^{2t}\left[b_1(t)\left\{\begin{pmatrix}1\\0\end{pmatrix}\cos 2t - \begin{pmatrix}0\\2\end{pmatrix}\sin 2t\right\} + b_2(t)\left\{\begin{pmatrix}0\\2\end{pmatrix}\cos 2t + \begin{pmatrix}1\\0\end{pmatrix}\sin 2t\right\}\right] + \begin{pmatrix}3e^{2t}\\te^{2t}\end{pmatrix}.$$

وبالإختصار نجد أن

$$b_1'(t)\left\{\begin{pmatrix}1\\0\end{pmatrix}\cos 2t - \begin{pmatrix}0\\2\end{pmatrix}\sin 2t\right\} + b_2'(t)\left\{\begin{pmatrix}0\\2\end{pmatrix}\cos 2t + \begin{pmatrix}1\\0\end{pmatrix}\sin 2t\right\} = \begin{pmatrix}3\\t\end{pmatrix}.$$

$$\therefore \begin{pmatrix}\cos 2t & \sin 2t\\-2\sin 2t & 2\cos 2t\end{pmatrix}\begin{pmatrix}b_1'(t)\\b_2'(t)\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}3\\t\end{pmatrix}$$

بالحل بالنسبة إلى $b_1'(t), b_2'(t)$ ، نجد أن

$$b_1'(t) = \frac{1}{2}\begin{vmatrix}3 & \sin 2t\\t & 2\cos 2t\end{vmatrix} = \frac{1}{2}(6\cos 2t - t\sin 2t),$$

بتكامل الحد الأول نحصل على

$$\int \cos 2t dt = \frac{1}{2}\sin 2t$$

نفترض أن $I_1 = \int t \sin 2t dt$ وبالتكامل بالتجزئ حيث

$$u = t \qquad dv = \sin 2t dt \Rightarrow du = dt \qquad v = -\frac{1}{2}\cos 2t.$$

$$\therefore I_1 = -\frac{1}{2}t\cos 2t + \frac{1}{4}\sin 2t$$

وعليه فإن

$$b_1(t) = \frac{1}{2}\left[3\sin 2t + \frac{1}{2}t\cos 2t - \frac{1}{4}\sin 2t\right]$$

$$= \frac{1}{8}\left[11\sin 2t + 2t\cos 2t\right].$$

$$b_2'(t) = \frac{1}{2}\begin{vmatrix} \cos 2t & 3 \\ -3\sin 2t & t \end{vmatrix} = \frac{1}{2}[t\cos 2t + 6\sin 2t].$$

ليكن $I_2 = \int t\cos 2t dt$ وبالتكامل بالتجزئ حيث

$$u = t \qquad dv = \cos 2t dt \Rightarrow du = dt \qquad v = \frac{1}{2}\sin 2t.$$

$$\therefore I_2 = \frac{1}{2}t\sin 2t + \frac{1}{4}\cos 2t$$

وعليه فإن

$$b_2(t) = \frac{1}{2}\left[\frac{1}{2}t\sin 2t + \frac{1}{4}\cos 2t - 3\cos 2t\right]$$

$$= \frac{1}{8}\left[2t\sin 2t - 11\cos 2t\right].$$

إذن يكون الحل الخاص

$$X_P = e^{2t}\begin{pmatrix} b_1(t)\cos 2t + b_2(t)\sin 2t \\ -2b_1(t)\sin 2t + 2b_2(t)\cos 2t \end{pmatrix}$$

$$= e^{2t}\begin{pmatrix} \frac{1}{8}[2t\cos 2t + 11\sin 2t]\cos 2t + \frac{1}{8}[2t\sin 2t - 11\cos 2t]\sin 2t \\ -2\left(\frac{1}{8}\right)[2t\cos 2t + 11\sin 2t]\sin 2t + 2\left(\frac{1}{8}\right)[2t\sin 2t - 11\cos 2t]\cos 2t \end{pmatrix}$$

$$= e^{2t}\begin{pmatrix} \frac{1}{4}t \\ \frac{-11}{4} \end{pmatrix}.$$

أو

$$X_P = \frac{1}{4}e^{2t}\begin{pmatrix} t \\ -11 \end{pmatrix}$$

ومن ذلك نجد أن الحل العام

$$X = X_H + \frac{1}{4}e^{2t}\begin{pmatrix} t \\ -11 \end{pmatrix}.$$

تمارين

أوجد الحل العام لكل من الأنظمة الآتية:

1) $\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}' = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -2 & 3 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} e^{t} \\ 2 \end{pmatrix}.$

2) $\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}' = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ -4 & 2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} te^{2t} \\ -e^{2t} \end{pmatrix}.$

3) $\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}' = \begin{pmatrix} 3 & 3 \\ -1 & -1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} t \\ 1 \end{pmatrix}.$

4) $\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}' = \begin{pmatrix} 3 & 3 \\ -1 & -1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} e^{-t} \\ e^{2t} \end{pmatrix}$ ملحوظة إستخدم (3)

5) $\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}' = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -2 & 3 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 \\ 3 \end{pmatrix} e^{t}$ 6) $\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}' = \begin{pmatrix} 4 & 1 \\ -4 & 8 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 1 \\ 6t \end{pmatrix} e^{6t}$

7) $\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}' = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -9 & 6 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 \\ t \end{pmatrix}$ 8) $\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}' = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 9 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} e^{t}$

9) $\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}' = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 9 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}$ 10) $\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}' = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & -2 & -5 \\ 0 & 1 & 2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 \\ 3 \\ 0 \end{pmatrix}.$

11) $\left.\begin{aligned} x' &= -2x + y \\ y' &= x - 2y \\ z' &= x + y - 5z \\ u' &= 5z \end{aligned}\right\}$ 12) $\left.\begin{aligned} x_1' &= -10x_1 + x_2 + 7x_3 \\ x_2' &= -9x_1 + 4x_2 + 5x_3 \\ x_3' &= -17x_1 + x_2 + 12x_3 \\ & x_1(0)=6, x_2(0)=1, x_3(0)=10 \end{aligned}\right\}$

13) $\left.\begin{aligned} & x_1' = x_2, x_2' = x_3, x_3' = x_1 \\ & x_1(0) = x_2(0) = x_3(0) = 1 \end{aligned}\right\}$ 14) $\left.\begin{aligned} & x_1' = x_3 + 1, x_2' = x_3, x_3' = x_1 - 2 \\ & x_1(0) = x_2(0) = x_3(0) = 1 \end{aligned}\right\}$

15) $\dot{x} = -2x + y \quad , \quad \dot{y} = x - 2y \quad , \quad \dot{z} = x + y - 5z \quad , \quad \dot{u} = 5z$

$.x(0) = 1 \quad , \quad y(0) = z(0) = u(0) = 0$

16) $\dot{x}_1 = 2x_1 + x_2 \quad , \quad \dot{x}_2 = -x_1 + x_3 \quad , \quad \dot{x}_3 = x_1 + 3x_2 + x_3$

$x_1(0) = 1 \quad , \quad x_2(0) = 1 \quad , \quad x_3(0) = 3$

17) $x_1' = 7x_1 + 4x_2 - 4x_3, \quad x_2' = 4x_1 - 8x_2 - x_3, \quad x_3' = -4x_1 - x_2 - 8x_3$

تحت الشروط الإبتدائية

$.x_3(0) = -1 \quad , \quad x_2(0) = 5, \quad x_1(0) = 3$

الباب الثالث

معادلات الرتبة الثانية ذات المعاملات المتغيرة

Second Order Differential Equations with Variable Coefficients

الباب الثالث

معادلات الرتبة الثانية ذات المعاملات المتغيرة

تكون المعادلة التفاضلية الخطية من الرتبة الثانية ذات المعاملات المتغيرة على الصورة العامة

$$\frac{d^2y}{dx^2}+p(x)\frac{dy}{dx}+q(x)y=r(x) \qquad (1)$$

وهذه المعادلة تكون متجانسة عندما $r(x)=0$ أما إذا كانت $r(x)\neq 0$ فإنها تكون غير متجانسة.

وهناك العديد من الطرق لحل تلك المعادلة، وكل معادلة لها مايناسبها من طريقة [وقد درسنا معادلة أويلر- كوشى ومعادلة لاجرانج فى الجزء الأول من هذا الكتاب] .

وسوف نعرض بعض الطرق البسيطة فى التناول في هذا الباب .

١ - طريقة تغيير البارامترات (الوسائط) Variation of parameters

إذا علم أن الحلين للمعادلة المتجانسة المناظرة للمعادلة (1) هما $y_1(x), y_2(x)$ وبالتالى فإن

$$y_H=c_1y_1(x)+c_2y_2(x)$$

حيث $y_1(x), y_2(x)$ حلان مستقلان، c_1, c_2 ثابتان إختياريان.

نفترض أن الحل الخاص على الصورة

$$y_P=c_1(x)y_1(x)+c_2(x)y_2(x)$$

حيث $c_1(x), c_2(x)$ دالتان فى x ، ويمكن إيجاد كل منهما (أنظر الجزء الاول)، حيث:

$$c_1(x)=\int\frac{-y_2(x)}{W(y_1(x),y_2(x))}r(x)dx, \qquad c_2(x)=\int\frac{y_1(x)}{W(y_1(x),y_2(x))}r(x)dx.$$

وذلك بحل المعادلتين

$$c_1'(x)y_1(x)+c_2'(x)y_2(x)=0$$
$$c_1'(x)y_1'(x)+c_2'(x)y_2'(x)=r(x)$$

مثال(١)

أوجد الحل العام للمعادلة

$$(2x+1)(x+1)y''+2xy'-2y=(2x+1)^2 \ldots \qquad (1)$$

بعد إثبات أن كلا من $y=x$, $y=\frac{1}{x+1}$ حل خاص للمعادلة المتجانسة المناظرة.

الحل

تكون المعادلة المتجانسة المناظرة على الصورة

$$(2x+1)(x+1)y''+2xy'-2y=0.... \qquad (2)$$

أ) نثبت أن $y=x$ حل للمعادلة (2) حيث

$$y'=1, y''=0$$

أى الطرف الأيمن $2x-2x=0$ =الطرف الأيسر

ب) نثبت أن $y=\frac{1}{x+1}$ حل للمعادلة (2) حيث

$$y'=\frac{-1}{(x+1)^2}, y''=\frac{2}{(x+1)^3}$$

الطرف الأيسر $= (2x+1)(x+1)\frac{2}{(x+1)^3}+2x\frac{-1}{(x+1)^2}-\frac{2}{x+1}$

$$=\frac{2(2x+1)}{(x+1)^2}-\frac{2x}{(x+1)^2}-\frac{2}{x+1}=\frac{2(2x+1)}{(x+1)^2}-\frac{2}{x+1}=0$$

الطرف الأيمن =

من أ)، ب) نجد أن $y_1=x$, $y_2=\frac{1}{x+1}$ حلان مستقلان للمعادلة (2).

أى أن الحل العام للمعادلة المتجانسة هو

$$y_H = c_1 y_1(x) + c_2 y_2(x)$$

حيث c_1, c_2 ثابتان إختياريان

نضع المعادلة المعطاه على الصورة العامة:

$$y'' + \frac{2x}{(2x+1)(x+1)} y' - \frac{2}{(2x+1)(x+1)} y = \frac{2x+1}{x+1}$$

حيث $x \neq -1, \frac{-1}{2}$ ، بالمقارنة بالمعادلة العامة، نجد أن

$$r(x) = \frac{2x+1}{x+1}.$$

و على ذلك فإن حل المعادلة المتجانسة يكون على الصورة

$$y_H = c_1 y_2(x) + c_2\ y_2(x) = c_1 x + c_2 \frac{1}{x+1}$$

حيث c_1, c_2 ثابتان

نفترض أن الحل الخاص على الصورة

$$y_P = c_1(x) x + c_2(x) \frac{1}{x+1}$$

حيث

$$c_1(x) = \int \frac{-y_2}{W\{y_1, y_2\}} r(x) dx, \qquad c_2(x) = \int \frac{y_1}{W\{y_1, y_2\}} r(x) dx.$$

وبالتلى فإن

$$W\{y_1, y_2\} = \begin{vmatrix} x & \dfrac{1}{x+1} \\ 1 & \dfrac{-1}{(x+1)^2} \end{vmatrix} = \frac{-x}{(x+1)^2} - \frac{1}{x+1} = \frac{-x-(x+1)}{(x+1)^2} = \frac{-(2x+1)}{(x+1)^2}$$

فيكون

$$c_1(x)=\int\frac{-\frac{1}{x+1}}{\frac{-(2x+1)}{(x+1)^2}}\cdot\frac{2x+1}{x+1}dx=\int dx=x$$

$$c_2(x)=\int\frac{x}{\frac{-(2x+1)}{(x+1)^2}}\cdot\frac{2x+1}{x+1}dx=-\int x(x+1)dx=\int\left[(x+1)-(x+1)^2\right]dx=\frac{1}{2}(x+1)^2-\frac{1}{3}(x+1)^3.$$

وعلى ذلك يكون الحل الخاص هو

$$y_P=x.x+\left[\frac{1}{2}(x+1)^2-\frac{1}{3}(x+1)^3\right]\frac{1}{x+1}=x^2+\frac{1}{2}(x+1)-\frac{1}{3}(x+1)^2$$
$$=\frac{2}{3}x^2-\frac{1}{6}x+\frac{1}{6}$$

ويكون الحل العام على الصورة

$$y=c_1x+\frac{c_2}{x+1}+\frac{2}{3}x^2-\frac{1}{6}x+\frac{1}{6}.$$

٢ - التحويل إلى الصورة القياسية : -

إذا كان لدينا المعادلة

$$y''+p(x)y'+q(x)y=r(x) \qquad (1)$$

نستخدم التعويض $y=uv$ ، حيث u دالة إختيارية، v دالة فى x وعلى ذلك فإن

$$y'=uv'+u'v, y''=uv''+2u'v'+u''v.$$

بالتعويض فى (1) نجد أن

$$uv''+(2u'+pu)v'+(u''+pu'+qu)v=r \qquad (2)$$

حيث u,v,p,q,r دوال فى x.

نختار u بحيث تحقق $\quad 2u'+pu=0$

وبالتالى فإن

$$u=\exp\left[-\frac{1}{2}\int pdx\right]$$

أى

$$u=e^{-\frac{1}{2}\int pdx}$$

ثم بالتعويض عن u,u',u'' فى المعادلة (2) ، تصبح المعادلة على الصورة

$$v''+I(x)v=R(x)\ldots \qquad (3)$$

حيث

$$I(x)=q-\frac{1}{2}p-\frac{1}{4}p^2,R(x)=\frac{r}{u}$$

المعادلة(3) تسمى الصورة القياسية للمعادلة (1) وهى تكون على صورة معادلة خطية ذات معاملات ثابتة أوعلى صورة معادلة أويلر-كوشى، وبحلها نحصل على الدالة v ، وبذلك نحصل على الحل العام $y=uv$.

مثال(٢)

بالتحويل إلى الصورة القياسية، أوجد الحل العام للمعادلة

$$x^2y''-2xy'+(x^2+2)y=x^3\sec x \qquad ;x>0$$

الحل

نضع المعادلة على الصورة

$$y''-\frac{2}{x}y'+(1+\frac{2}{x^2})y=x\sec x$$

نفرض $y=uv$ بحيث نختار $u=e^{-\frac{1}{2}\int pdx}$

بالمقارنة بالمعادلة $y''+p(x)y'+q(x)y=r(x)$ نجد أن

$$p(x)=\frac{-2}{x},q(x)=1+\frac{2}{x^2},r(x)=x\sec x$$

وبالتالى فإن

$$u=e^{-\frac{1}{2}\int\frac{-2}{x}dx}=x$$

وعلى ذلك فإن $y = xv, y' = xv' + v, y'' = xv'' + 2v'$

بالتعويض فى المعادلة نحصل على

$$xv'' + 2v' - \frac{2}{x}(xv' + v) + (1 + \frac{2}{x^2})xv = x \sec x$$

$$\therefore v'' - \left[\frac{2}{x^2} - 1 - \frac{2}{x^2}\right]v = \sec x$$

أى أن $v'' + v = \sec x$

وتلك هى الصورة القياسية للمعادلةالتفاضلية، وهى معادلة تفاضلية خطية ذات معاملات ثابتة غير متجانسة ولحلها،

١) نوجد حل المعادلة المتجانسة $(D^2 + 1)v = 0$

نجد أن $v = c_1 \cos x + c_2 \sin x$

٢) نوجد الحل الخاص v_p بطريقة تغيير البارامتراتوذلك بفرض

$$v_p = c_1(x) \cos x + c_2(x) \sin x$$

حيث $v_1 = \cos x, v_2 = \sin x$

$$W(v_1, v_2) = \begin{vmatrix} \cos x & \sin x \\ -\sin x & \cos x \end{vmatrix} = 1$$

$$\therefore c_1(x) = \int \frac{-v_2}{W} f dx = \int -\sin x . \sec x dx = \ln \cos x$$

$$c_2(x) = \int \frac{v_1}{W} f dx = \int \cos x \sec x dx = x.$$

$$\therefore v_p = (\ln \cos x) \cos x + x \sin x.$$

ومن ذلك فإن الحل العام للمعادلة القياسية

$$v = (c_1 + \ln \cos x) \cos x + (c_2 + x) \sin x$$

وعلى ذلك فإن الحل العام للمعادلة التفاضلية المعطاه

$$y = x\left[(c_1 + \ln\cos x)\cos x + (c_2 + x)\sin x\right].$$

مثال (٣)

بالتحويل إلى الصورة القياسية، أوجد الحل العام للمعادلة

$$4x^2y'' + 4xy' + (x^2 - 1)y = 0 \qquad ; x > 0$$

الحل

نضع المعادلة على الصورة

$$y'' + \frac{1}{x}y' + \left(\frac{1}{4} - \frac{1}{4x^2}\right)y = 0$$

بالمقارنة بالمعادلة

$$y'' + p(x)y' + q(x)y = r(x)$$

نجد أن

$$p(x) = \frac{1}{x} \Rightarrow \int p(x)dx = \int \frac{1}{x}dx = \ln x$$

نختار

$$u = e^{-\frac{1}{2}\int p(x)dx} = e^{-\frac{1}{2}\ln x} = \frac{1}{\sqrt{x}}$$

نستخدم التعويض $y = \frac{1}{\sqrt{x}}v$ للتحويل إلى الصورة القياسية فيكون

$$y' = \frac{1}{\sqrt{x}}v' - \frac{1}{2x\sqrt{x}}v, y'' = \frac{1}{\sqrt{x}}v'' - \frac{1}{2x\sqrt{x}}v' - \frac{1}{2x\sqrt{x}}v' + \frac{3}{4x^2\sqrt{x}}v$$

$$= \frac{1}{\sqrt{x}}v'' - \frac{1}{x\sqrt{x}}v' + \frac{3}{4x^2\sqrt{x}}v.$$

بالتعويض فى المعادلة التفاضلية المعطاه نجد أن

$$\frac{1}{\sqrt{x}}v''-\frac{1}{x\sqrt{x}}v'+\frac{3}{4x^2\sqrt{x}}v+\frac{1}{x\sqrt{x}}v'-\frac{1}{2x^2\sqrt{x}}v+\frac{1}{4\sqrt{x}}v-\frac{1}{4x^{?}}$$

$$\therefore \frac{1}{\sqrt{x}}v''+\frac{1}{4\sqrt{x}}v=0.$$

ى $\sqrt{x}$

دلة على الصورة القياسية $$v''+\frac{1}{4}v=0$$

ون

$$v=c_1\cos\frac{1}{2}x+c_2\sin\frac{1}{2}x.$$

ل العام للمعادلة يكون:

$$y=\frac{1}{\sqrt{x}}\left[c_1\cos\frac{1}{2}x+c_2\sin\frac{1}{2}x\right].$$

ريقة تحليل المؤثر:

وهى طريقة سهلة إذا كانت قابلة للتطبيق ، وهى طريقة تختزل المعادلة من الرتبة الثانية إلى معادلة من الرتبة الأولى .

إذا كان لدينا المعادلة

$$y''+p(x)y'+q(x)y=r(x)$$

أو

$$(D^2+p(x)D+q(x))y=r(x) \qquad (1)$$

و أمكن تحليل المؤثر التفاضلى كما يأتى

$$\left[D^2+p(x)D+q(x)\right]y=(D+p_1(x))(D+p_2(x))y$$

تصبح المعادلة على الصورة

$$(D+p_1(x))(D+p_2(x))y=r(x)$$

ثم نفترض أن

$$(D+p_2(x))y=z \qquad (2)$$

و على ذلك فإن

$$(D+p_1(x))z=r(x)$$

أو

$$\frac{dz}{dx}+p_1(x)z=r(x)$$

وهى معادلة تفاضلية خطية من الرتبة الأولى ، وبحلها نحصل على قيمة z و بالتعويض فى (2) عن $z=z(x)$ تصبح (2) على الصورة

$$\frac{dy}{dx}+p_2(x)y=z(x)$$

و هى أيضا معادلة خطية من الرتبة الأولى فى y وبحلها نحصل على الحل العام y.

مثال (٤)

بطريقة تحليل المؤثر أوجد الحل العام للمعادلة

$$(x+2)\,y''-(2x+5)\,y'+2y=2\,(x+2)^2\,e^{2x}\ ,\ x\neq 2$$

الحل

نكتب المعادلة على الصورة

$$[(x+2)D^2-(2x+5)D+2]y=2(x+2)^2e^{2x} \qquad (1)$$

حيث $D=\dfrac{d}{dx}$

وبتحليل الطرف الايسر للمعادلة (1) تصبح على الصورة

$$((x+2)D-1)(D-2)y=2(x+2)^2e^{2x} \qquad (2)$$

نفترض أن $(D-2)y=z.....(3)$

بالتعويض من (3) فى (2) نحصل على

$$\therefore ((x+2)D-1)z = 2(x+2)^2 e^{2x}$$

أو

$$(x+2)\frac{dz}{dx} - z = 2(x+2)^2 e^{2x}$$

بالقسمة على $(x+2)$ ،تصبح

$$\frac{dz}{dx} - \frac{1}{x+2}z = 2(x+2)e^{2x} \qquad .....(4)$$

المعادلة(4) معادلة تفاضلية خطية من الرتبة الأولى ويكون عامل التكامل هو

$$\mu(x) = e^{-\int \frac{1}{x+2}dx} = \frac{1}{x+2}.$$

وعلى ذلك فإن

$$\int \frac{1}{x+2} 2(x+2)e^{2x}dx = e^{2x}.$$

ويكون حل المعادلة (4) هو

$$\frac{1}{x+2}z = e^{2x} + c_1$$

$$\therefore z = (x+2)e^{2x} + c_1(x+2) \qquad .....(5)$$

بالتعويض من (5) فى (3)

$$\therefore (D-2)y = (x+2)e^{2x} + c_1(x+2)$$

أو

$$\frac{dy}{dx} - 2y = (x+2)e^{2x} + c_1(x+2)$$

وهى معادلة تفاضلية خطية من الرتبة الأولى، ويكون عامل التكامل μ هو

$$\mu = e^{-\int 2\,dx} = e^{-2x} =$$

$$\mu = \int e^{-2x}[(x+2)e^{2x} + c_1(x+2)]dx$$

$$\mu = \frac{1}{2}(x+2)^2 + c_1[\frac{e^{-2x}}{-2}(x+2) - \frac{e^{-2x}}{4}]$$

أى أن الحل العام يكون

$$e^{-2x}y = \frac{1}{2}(x+2)^2 - \frac{1}{2}c_1e^{-2x}(x+2) - \frac{1}{4}c_1e^{-2x} + c_2$$

أو

$$y = \frac{1}{2}(x+2)^2e^{2x} - \frac{1}{4}c_1(2x+5) + c_2e^{2x}.$$

مثال (٢)

أ) أثبت أن $xD^2 + (2x+3)D + 4 \equiv (D+2)(xD+2)$

ب) أوجد الحل العام للمعادلة

$$xy'' + (2x+3)y' + 4y = e^{2x}$$

بطريقة تحليل المؤثر.

الحل

أ)

$$(D+2)(xD+2)y = D(xD)y + D(2y) + 2xDy + 4y$$

$$= xD^2y + Dy + 2Dy + 2xDy + 4y$$

$$= [xD^2 + (2x+3)D + 4]y.$$

أى أن $xD^2 + (2x+3)D + 4 \equiv (D+2)(xD+2)$

ب) لحل المعادلة، يمكن أن نضعها على الصورة

$$(D+2)(xD+2)y = e^{2x} \qquad .....(1)$$

نفترض أن $(xD+2)y = z.$ (2)

بالتعويض فى (1)

$$\therefore (D+2)z = e^{2x}$$

أو

$$\frac{dz}{dx} + 2z = e^{2x} \qquad (3)$$

وهى معادلة تفاضلية خطية من الرتبة الأولى، ويكون عامل التكامل هو

$$\mu(x) = e^{\int 2dx} = e^{2x}.$$

وعلى ذلك فإن

$$\int e^{2x} e^{2x} dx = \frac{1}{4} e^{4x}.$$

وبالتالى فإن حل المعادلة (3) هو

$$e^{2x} z = \frac{1}{4} e^{4x} + c_1$$

وعلى ذلك فإن

$$\therefore z = c_1 e^{-2x} + \frac{1}{4} e^{2x}.$$

بالتعويض عن z فى (2) فيكون

$$(xD+2)y = c_1 e^{-2x} + \frac{1}{4} e^{2x}.$$

أو

$$\frac{dy}{dx} + \frac{2}{x} y = \frac{c_1}{x} e^{-2x} + \frac{1}{4x} e^{2x}$$

وهى معادلة تفاضلية خطية من الرتبة الأولى، ويكون عامل التكامل هو

$$\mu(x) = e^{\int \frac{2}{x} dx} = e^{\ln x^2} = x^2.$$

وعلى ذلك فإن

$$\int x^2\left[\frac{c_1}{x}e^{-2x}+\frac{1}{4x}e^{2x}\right]dx=\int(c_1xe^{-2x}+\frac{1}{4}xe^{2x})dx$$
$$=c_1[\frac{-1}{2}xe^{-2x}-\frac{1}{4}e^{-2x}]+\frac{1}{4}[\frac{1}{2}xe^{2x}-\frac{1}{4}e^{2x}]$$
$$=\frac{-1}{4}c_1(2x+1)e^{-2x}+\frac{1}{16}(2x-1)e^{2x}$$

وعلى ذلك فإن الحل العام للمعادلة (1) يكون على الصورة

$$x^2y=\frac{-1}{4}c_1(2x+1)e^{-2x}+\frac{1}{16}(2x-1)e^{2x}+c_2$$

أو

$$y=\frac{-1}{4}c_1\frac{(2x+1)}{x^2}e^{-2x}+c_2\frac{1}{x^2}+\frac{1}{16}\frac{(2x-1)}{x^2}e^{2x}.$$

ملحوظة: عند إستخدام طريقة تحليل المؤثر(عموما) فإن

$$[D+p_1(x)][D+p_2(x)]y\neq[D+p_2(x)][D+p_1(x)]y.$$

٤ - إستخدام صيغة آبل فى حل المعادلات التفاضلية الخطية من الرتبة الثانية :

أولا: - المعادلة المتجانسة: -

إذا كان لدينا المعادلة $y''+p(x)y'+q(x)y=0$ وكان $y_1(x),y_2(x)$ هما حلا المعادلة، حيث $p(x),q(x)$ دالتين متصلتين فى الفترة $a\le x\le b$

تمكن آبل (Abel) من حساب قيمة $W\{y_1,y_2;x\}$ أو $W\{y_1(x),y_2(x)\}$ بالصيغة الآتية:

$$W\{y_1,y_2;x\}=W\{y_1,y_2;x_0\}e^{-\int_{x_0}^{x}p(z)dz}$$

حيث $a\le x_0\le x\le b$.

وهذه الصيغة تعرف بإسم صيغة آبل، ونلاحظ أن $W\{y_1,y_2;x_0\}$ قيمة ثابتة لأنها عند نقطة معينة x_0 وتستخدم هذه الصيغة فى إيجاد حل المعادلة المتجانسة من الرتبة الثانية إذا علم أحد الحلين، وليكن $y_1(x)$ فإن

$$y_2(x)=W\{y_1,y_2;x_0\}y_1(x)\int_{x_0}^{x}\frac{e^{-\int_{x_0}^{s}p(z)dz}}{[y_1(s)]^2}ds$$

وحيث إن $W\{y_1,y_2;x_0\}$ مقدار ثابت فإننا نعتبره مساويا الوحدة، وبالتبسيط يمكن أن نكتب

$$y_2(x)=y_1(x)\int^{x}\frac{e^{-\int^{s}p(z)dz}}{[y_1(s)]^2}ds$$

حيث يكون الحل العام $y(x)=c_1y_1(x)+c_2y_2(x)$

ثانيا: - المعادلة غير المتجانسة: -

بإستخدام صيغة آبل، أمكن حل المعادلة غير المتجانسة

$$y''+p(x)y'+q(x)y=r(x)$$

وذلك إذا علم $y_1(x)$ حل للمعادلة المتجانسة، فيكون الحل العام للمعادلة غير المتجانسة على الصورة

$$y(x)=c_1y_1(x)+c_2y_2(x)+\int^{x}\frac{r(s)}{W\{y_1,y_2;s\}}\begin{vmatrix}y_1(s) & y_2(s)\\ y_1(x) & y_2(x)\end{vmatrix}ds$$

حيث $y_2(x)$ الحل الآخر للمعادلة المتجانسة، ونحصل على $W\{y_1,y_2;s\}$ بإستخدام صيغة آبل

$$W\{y_1,y_2;s\}=W\{y_1,y_2;x_0\}e^{-\int^{s}p(z)dz}$$

وباعتبار $W\{y_1, y_2; x_0\} = 1$

فإن الحل العام يكون على الصورة

$$y(x) = c_1 y_1(x) + c_2 y_2(x) + \int^x e^{\int^s p(z)dz} r(s) \begin{vmatrix} y_1(s) & y_2(s) \\ y_1(x) & y_2(x) \end{vmatrix} ds$$

مثال (١)

إذا علم أن $y_1 = x\sin x$ حل خاص للمعادلة المتجانسة $x^2y'' - 2xy' + (x^2+2)y = 0$ فأوجد الحل العام للمعادلة $x^2y'' - 2xy' + (x^2+2)y = x^3\sec x; x > 0$ بإستخدام صيغة آبل.

الحل

نتحقق أولا أن $y_1 = x\sin x$ حل للمعادلة المتجانسة وعلى ذلك فإن

$$y' = x\cos x + \sin x, y'' = -x\sin x + 2\cos x.$$

الطرف الأيسر $= x^2[-x\sin x + 2\cos x] - 2x[x\cos x + \sin x] + (x^2+2)x\sin x$

= الطرف الأيمن = 0

ثم نوجد بإستخدام صيغة آبل

$$y_2 = y_1(x)\int \frac{e^{-\int p(x)dx}}{[y_1(x)]^2} dx$$

نضع المعادلة المتجانسة على الصورة

$$y'' - \frac{2}{x}y' + (1 + \frac{2}{x^2})y = 0$$

$$\therefore p(x) = \frac{-2}{x}$$

$$\therefore e^{-\int p(x)dx} = e^{\int \frac{2}{x}dx} = e^{\ln x^2} = x^2$$

$$\therefore y_2 = x\sin x \int \frac{x^2}{x^2 \sin^2 x} dx = x\sin x \int \operatorname{cosec}^2 x dx$$

$$= -x\sin x \cot x = -x\cos x$$

ثم نوجد

$$\begin{vmatrix} y_1(s) & y_2(s) \\ y_1(x) & y_2(x) \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} s\sin s & -s\cos s \\ x\sin x & -x\cos x \end{vmatrix} = -sx\sin s\cos x + sx\cos s\sin x$$

ويكون الحل العام على الصورة

$$y = c_1 y_1 + c_2 y_2 + \int^{x} e^{\int^{s} p(z)dz} r(s) \begin{vmatrix} y_1(s) & y_2(s) \\ y_1(x) & y_2(x) \end{vmatrix} ds$$

$$= c_1 x\sin x - c_2 x\cos x + \int^{x} e^{\int^{s} \frac{-2}{z}dz} s\sec s[-sx\sin s\cos x + sx\cos s\sin x]ds$$

$$= c_1 x\sin x - c_2 x\cos x + x\int^{x} \sec s[-\sin s\cos x + \cos s\sin x]ds$$

$$y = c_1 x\sin x - c_2 x\cos x + x[\cos x\ln\cos x + x\sin x].$$

مثال ٢

إذا علم أن $y_1(x) = x$ حل للمعادلة

$$(x-1)y'' - xy' + y = 0, \qquad x \neq 1$$

فأوجد الحل العام للمعادلة بإستخدام صيغة آبل

الحل

نتحقق أولا أن $y_1 = x$ حل للمعادلة، ثم نضع المعادلة على الصورة

$$y'' + p(x)y' + q(x)y = 0$$

أى على الصورة

$$y'' - \frac{x}{x-1}y' + \frac{1}{x-1}y = 0$$

حيث

$$p(x) = -\frac{x}{x-1}$$

$$-\int p(x)dx = \int \frac{x}{x-1}dx = \int \frac{x-1+1}{x-1}dx = \int \left[1 + \frac{1}{x-1}\right]dx$$

$$= x + \ln(x-1).$$

$$\therefore e^{-\int p(x)dx} = e^{x+\ln(x-1)} = (x-1)e^x.$$

وباستخدام صيغة آبل

$$y_2(x) = y_1(x)\int \frac{e^{-\int p(x)dx}}{[y_1(x)]^2}dx$$

$$= x\int \frac{(x-1)e^x}{x^2}dx = x\int [\frac{1}{x}e^x - \frac{1}{x^2}e^x]dx.$$

نوجد $\int \frac{1}{x}e^x dx$ بالتجزئ

$$let \qquad u = \frac{1}{x} \qquad dv = e^x dx \qquad du = \frac{-1}{x^2}dx \qquad v = e^x.$$

$$\therefore \int \frac{1}{x}e^x dx = \frac{1}{x}e^x + \int \frac{1}{x^2}e^x dx$$

$$y_2(x) = x[\frac{1}{x}e^x] = e^x.$$

ومن ذلك، يكون الحل العام على الصورة

$$y(x) = c_1 x + c_2 e^x.$$

٥ - إستبدال المتغير المستقل

ليكن لدينا المعادلة التفاضلية

$$\frac{d^2y}{dx^2} + P\frac{dy}{dx} + Qy = R \qquad (1)$$

حيث P,Q,R دوال فى x . وبإستبدال المتغير المستقل x بالمتغير z أى $z = f(x)$ مثلا فيكون

$$\frac{dy}{dx} = \frac{dy}{dz}.\frac{dz}{dx}, \quad \frac{df}{dx} = \frac{df}{dz}.\frac{dz}{dx}$$

$$\frac{d^2y}{dx^2} = \frac{d}{dx}\left(\frac{dy}{dx}\right) = \frac{d}{dx}\left(\frac{dy}{dz}.\frac{dz}{dx}\right) = \frac{d}{dx}\left(\frac{dy}{dz}\right).\frac{dz}{dx} + \frac{dy}{dz}\frac{d^2z}{dx^2}$$

$$= \frac{dy}{dz}\left(\frac{dy}{dz}\right)\frac{dz}{dx}.\frac{dz}{dx} + \frac{dy}{dx}.\frac{d^2z}{dx^2} = \frac{d^2y}{dx^2}\left(\frac{dz}{dx}\right)^2 + \frac{dy}{dz}.\frac{d^2z}{dx^2}$$

وبالتعويض فى المعادلة (1) نحصل على

$$\frac{d^2y}{dz^2}\left(\frac{dz}{dx}\right)^2 + \frac{dy}{dz}\frac{d^2z}{dx^2} + P\frac{dy}{dz}.\frac{dz}{dx} + Qy = R$$

أو

$$\frac{d^2y}{dz^2}\left(\frac{dz}{dx}\right)^2 + \left(\frac{d^2z}{dx^2} + P\frac{dz}{dx}\right)\frac{dy}{dz} + Qy = R$$

بالقسمة على $\left(\frac{dy}{dz}\right)^2$ نحصل على

$$\frac{d^2y}{dz^2} + P_1\frac{dy}{dz} + Q_1 y = R_1 \qquad (2)$$

حيث

$$\left.\begin{aligned} P_1 &= \frac{\left(\frac{d^2z}{dx^2}\right)+P\left(\frac{dz}{dx}\right)}{\left(\frac{dz}{dx}\right)^2} \\ Q_1 &= \frac{Q}{\left(\frac{dz}{dx}\right)^2}, R_1 = \frac{R}{\left(\frac{dz}{dx}\right)^2} \end{aligned}\right\} \qquad (3)$$

حيث P_1, Q_1, R_1 دوال فى x فقط (ويمكن تحويلهم إلى دوال فى z بإستخدام التعويض $(z = f(x))$). إذا ساوينا Q_1 بالثابت فإن P_1 تصبح ثابتا أيضا وبالتالى يمكن حل المعادلة (2) لأنها معادلة خطية ذات معاملات ثابته.

ويمكن تلخيص خطوات الحل بهذه الطريقة على النحو التالى: -

(i)نجعل معامل y'' يساوى الوحدة أى تكون المعادلة على الصورة

$$y'' + Py' + Qy = R \qquad (1)$$

(ii) نفرض أن $Q = \pm Kf(x)$ ثم نفرض العلاقة بين x, z على الصورة

$\left(\frac{dz}{dx}\right)^2 = Kf(x)$ حيث K ثابت ما.

(iii) من الخطوة (ii) يكون

$$\frac{dz}{dx} = +\sqrt{Kf(x)} \qquad (2)$$ (مهملا الإشارة السالبة)

ومنها

$$z = \int \sqrt{Kf(x)}\,dx \qquad (3)$$

(iv) من العلاقة (3) بين x, z يمكن تحويل المعادلة (1) إلى الصورة

$$\frac{d^2y}{dz^2}+P_1\frac{dy}{dz}+Q_1y=R_1 \qquad (4)$$

حيث

$$P_1=\frac{\left(\frac{d^2z}{dx^2}\right)+P\left(\frac{dz}{dx}\right)}{\left(\frac{dz}{dx}\right)^2},Q_1=\frac{Q}{\left(\frac{dz}{dx}\right)^2},R_1=\frac{R}{\left(\frac{dz}{dx}\right)^2} \qquad (5)$$

من (2) نرى أن $Q_1=\frac{\pm Kf(x)}{Kf(x)}=\pm 1$ ، ثابت ما. وبعد ذلك نحسب P_1. فإذا كانت تساوى ثابت فإنه يمكن حل المعادلة (4) لأنها معادلة خطيه ذات معاملات ثابته. أما إذا لم تكن كذلك فتفشل هذه الطريقه

(v) بعد حل المعادلة (4) نعوض عن z بدلاله x فنحصل على الحل المطلوب.

مثال(١)

حل المعادلة

$$(\sin^2 x)y''+\sin x\cos xy'+4y=0$$

الحل

نكتب المعادلة على الصورة

$$y''+\cot xy'+4\cos ec^2 xy=0 \qquad (1)$$

فيكون

$$P=\cot x,Q=4\cos ec^2 x,R=0 \qquad (2)$$

نختار z بحيث

$$\left(\frac{dz}{dx}\right)^2=4\cos ec^2 x \qquad (3)$$

ومنها نحصل على

$$dz = 2\cos ecx \Rightarrow z = 2\ln\tan\left(x/2\right) \qquad (4)$$

وبإستبدال المتغير المستقل x بالمتغير z فتتحول المعادلة (1) إلى الصورة

$$\frac{d^2y}{dz^2} + P_1\frac{dy}{dz} + Q_1 y = R_1 \qquad (5)$$

حيث

$$P_1 = \frac{\left(\frac{d^2z}{dx^2}\right) + P\left(\frac{dz}{dx}\right)}{\left(\frac{dz}{dx}\right)^2} = \frac{-2\cos ecx.\cot x + \cot x(2\cos ecx)}{4\cos ec^2 x} = 0$$

$$Q_1 = \frac{Q}{\left(\frac{dz}{dx}\right)^2} = \frac{4\cos ec^2 x}{4\cos ec^2 x} = 1, R_1 = \frac{R}{\left(\frac{dz}{dx}\right)^2} = 0$$

وبالتعويض فى (5) نحصل على

$$\frac{d^2y}{dz^2} + y = 0 \Rightarrow (D_1^2 + 1)y = 0; D_1 = \frac{d}{dz}$$

ويكون الحل على الصورة

$$y = c_1\cos z + c_2\sin z$$

$$= c_1\cos\left\{2\ln\tan\left(x/2\right)\right\} + c_2\sin\left\{2\ln\tan\left(x/2\right)\right\}.$$

مثال (٢)

حل المعادلة

$$(\cos x)\,y'' + y'\sin x - 2y\cos^3 x = 2\cos^5 x$$

الحل

نكتب المعادلة على الصورة

$$y'' + y'\tan x - (2\cos^2 x)y = 2\cos^4 x \qquad (1)$$

بالمقارنه مع

$$y'' + Py' + Qy = R$$

يكون لدينا

$$P = \tan x, Q = -2\cos^2 x, R = 2\cos^4 x \qquad (2)$$

نختار z بحيث

$$\left(\frac{dz}{dx}\right)^2 = 2\cos^2 x \qquad \therefore \frac{dz}{dx} = \sqrt{2}.\cos x$$

$$dz = \sqrt{2}.\cos x dx \qquad \therefore z = \sqrt{2}\sin x \qquad (3)$$

وبذلك تأخذ المعادلة (1) الصورة

$$\frac{d^2y}{dz^2} + P_1\frac{dy}{dz} + Q_1 y = R_1 \qquad (4)$$

حيث

$$P_1 = \frac{\left(\dfrac{d^2z}{dx^2}\right) + P\left(\dfrac{dz}{dx}\right)}{\left(\dfrac{dz}{dx}\right)^2} = \frac{-\sqrt{2}\sin x + \tan x.\sqrt{2}\cos x}{2\cos^2 x} = 0$$

$$Q_1 = \frac{Q}{\left(\dfrac{dz}{dx}\right)^2} = -1, R_1 = \frac{R}{\left(\dfrac{dz}{dx}\right)^2} = \frac{2\cos^4 x}{2\cos^2 x} = \cos^2 x$$

أى

$$R_1 = 1 - \sin^2 x = 1 - \frac{z^2}{2}$$

بالتعويض في (4) نحصل على

$$(D_1^2 - 1)y = 1 - \frac{z^2}{2} \qquad \text{أي} \qquad \frac{d^2y}{dz^2} - y = 1 - \frac{z^2}{2}$$

ويكون حل الدالة المتممة هو

$$y_H = c_1 e^z + c_2 e^{-z}$$

ويكون الحل الخاص هو

$$y_P = \frac{1}{D_1^2 - 1}[1 - \frac{1}{2}z^2] = -1 + \frac{1}{2}(z^2 + 2) = \frac{z^2}{2}$$

ويكون الحل العام هو

$$y = c_1 e^z + c_2 e^{-z} + \frac{1}{2}z^2 = c_1 e^{\sqrt{2}\sin x} + c_2 e^{-\sqrt{2}\sin x} + \sin^2 x.$$

٦ -المعادلة التامة: Exact Equations

يقال أن المعادلة التفاضلية

$$a_2(x)y'' + a_1(x)y' + a_0(x)y = f(x) \qquad (1)$$

تامه إذا أمكن إيجاد معادلة تفاضلية من الرتبه الأولى يكون تفاضلها هو المعادله (1) وبعباره أخرى تكون المعادلة (1) تامه إذا أمكن الحصول عليها بتفاضل معادلة تفاضلية من الرتبه الأولى. ومثال ذلك المعادلة التفاضلية

$$(x^2 + 1)y'' + 3xy' + y = 3x^2$$

تامه لأنها تنتج من تفاضل المعادلة

$$(x^2 + 1)y' + xy' + xy = x^3$$

وسنسرد النظرية التاليه بدون برهان

نظرية:

الشرط الضروري والكافي لتكون المعادلة (1) تامه هو

$$a_2''(x)-a_1'(x)+a_0(x)=0$$

وبالتالى يكون التكامل الأول "First integral" للمعادلة (1) هو

$$a_2y'+(a_1-a_2')y=\int f(x)dx+c \qquad (2)$$

مثال(١)

أثبت أن المعادلة $(\cos x)y''+(2\sin x)y'+(3\cos x)y=\tan^2 x$ تامة

الحل

بالمقارنة بالمعادلة(١) نجد أن

$$a_2=\cos x, a_1=(2\sin x), a_0=3\cos x$$

وعلى ذلك فإن

$$a_2'=-\sin x, a_2''=-\cos x, a_1'=2\cos x, a_0=3\cos x$$

وبتطبيق الشرط

$$a_2''-a_1'+a_0=0$$

نحصل على

$$-\cos x-2\cos x+3\cos x=0$$

وعلى ذلك فإن المعادلة المعطاة تامة

مثال(٢)

أثبت أن المعادلة $(1+x^2)y''+3xy'+y=1+3x^2$ تامه ثم أوجد حلها.

الحل

لدينا

$$a_2=(1+x^2), a_1=3x, a_0=1$$

وعلى ذلك فإن

$$a_2'=2x, a_2''=2, a_1'=3$$

وبإستخدام شرط التمام

$$a_2'' - a_1' + a_0 = 2 - 3 + 1 = 0$$

∴ المعادلة المعطاه تامه. ويكون تكاملها الأول بإستخدام المعادلة (2) وهو

$$a_2 y' + (a_1 - a_2')y = \int f(x)dx + c$$

أى أن

$$(1+x^2)y' + (3x - 2x)y = \int (1+3x^2)dx + c$$

$$(1+x^2)y' + xy = x + x^3 + c_1$$

أى أن

$$y' + \frac{x}{1+x^2}y = x + \frac{c_1}{1+x^2}$$

وهى معادلة خطية يكون عامل التكامل هو $e^{\int \frac{x}{1+x^2}dx} = \left(1+x^2\right)^{\frac{1}{2}}$

ويكون حلها هو

$$y\left(1+x^2\right)^{\frac{1}{2}} = \frac{1}{3}\left(1+x^2\right)^{\frac{3}{2}} + c_1 \ln\left[x + \left(1+x^2\right)^{\frac{1}{2}}\right] + c_2$$

مثال (٣)

أثبت أن المعادلة $\left(1+x^2\right)y'' + 4xy' + 2y = \sec^2 x$ تامه وأوجد حلها بحيث $y = 0, y' = 1$ عندما $x = 0$.

الحل

لدينا

$$a_2 = 1 + x^2, a_1 = 4x, a_0 = 2$$

$$a_2' = 2x, a_2'' = 2, a_1' = 4$$

وبإستخدام شرط التمام

$$a_2'' - a_1' + a_0 = 2 - 4 + 2 = 0$$

وعليه فإن المعادلة المعطاه تامة ويكون تكاملها الأول بإستخدام المعادلة (2)

$$a_2 y' + (a_1 - a_2')y = \int f(x)dx + c$$

هو

$$(1+x^2)y'+(4x-2x)y=\int \sec^2 x dx+c_1$$

أى أن

$$y'+\frac{2x}{1+x^2}y=\frac{\tan x}{1+x^2}+\frac{c_1}{1+x^2}$$

وهى معادلة تفاضلية خطيه ويكون عامل التكامل هو $(1+x^2)$ ويكون حلها هو

$$y(1+x^2)=\ln\sec x+c_1\tan^{-1}x+c_2$$

وبوضع $x=0, y=0$ نحصل على $c_2=0$ وبتفاضل المعادلة الأخيرة نحصل على

$$(1+x^2)y'+2xy=\tan x+\frac{c_1}{1+x^2}$$

وبوضع $x=0, y=0, y'=1$ فيها نحصل على $c_1=1$ وبذلك يكون الحل هو

$$(1+x^2)y=\ln\sec x+\tan^{-1}x.$$

٧- المعادلة المزامه: Adjoint Equation

إذا لم تكن المعادلة التفاضلية

$$L(y)=a_2(x)y''+a_1(x)y'+a_0(x)y=0 \qquad (1)$$

تامه فإننا نبحث عن عامل تكامل $z(x)$ بحيث يكون $zL(y)$ تفاضل تام أى يكون $zL(y)=\frac{d}{dx}L_1(y)$ حيث L_1 مؤثر تفاضلى من الرتبه الأولى. وبالتكامل بالتجزئ أى $\int zL(y)dx=L_1(y)$ حيث L_1 مؤثر تفاضلى من الرتبه الأولى وعلى ذلك فإن $zL(y)$ تصبح تفاضلا تاما إذا كان

$$\bar{L}(z)=(a_2(x)z)''-(a_1(x)z)'+a_0(x)z=0 \qquad (2)$$

من ذلك نرى أن البحث عن عامل التكامل للمعادلة (1) قادنا إلى البحث عن حل لمعادلة تفاضلية أخرى من الرتبة الثانية (2) تسمى المعادلة (2) بالمعادلة المزاملة للمعادلة

(1) كما يسمى $\overline{L}$ بالمؤثر المزامل Adjoint operator للمؤثر L. فإذا أمكننا إيجاد الحل z للمعادلة المزاملة (2) فإن z هى عامل التكامل للمعادلة (1) الذى يحولها إلى معادلة خطية يسهل حلها. هذا وقد لانستطيع حل المعادلة المزاملة (2). وتوجد حالات خاصة يسهل فيها حل المعادلة المزاملة (2) .

ملحوظة: المعادلة المزاملة للمعادلة (2) هى المعادلة (1) .

المعادلة المزاملة ذاتيا: Self adjoint equation

تعريف: يقال أن المعادلة (1) مزاملة ذاتيا إذا كانت المعادلة المزاملة (2) لها نفس صورة المعادلة الأصلية (1). أى تكون المعادلة (1) متزاملة ذاتيا إذا كان

$$\overline{L}(y) = L(y)$$

مثال (١)

معادلة بسل من الرتبة صفر $xy'' + y' + xy = 0$ تكون المعادلة المزاملة لها هى

$$(xz)'' - z' + xz = 0 \Rightarrow xz'' + z' + xz = 0$$

وهى نفس صورة المعادلة الأصلية وبالتالى فهى متزاملة ذاتيا.

ملحوظة: إذا كتبنا المعادلة السابقة "بعد القسمة على x" على الصورة

$$y'' + \frac{1}{x} y' + y = 0$$

تكون المعادلة المزاملة لها هى

$$z'' - \left(\frac{1}{x} z\right)' + z = 0$$

$$z'' - \frac{1}{x} z + \frac{1}{x^2} z + z = 0$$

وليس نفس صورة المعادلة الأصلية وبالتالى فهى غير متزاملة ذاتيا

وسنسرد النظريات التالية بدون برهان

نظرية (١):

الشرط الضرورى والكافى لكى تكون المعادلة (1) متزاملة ذاتيا هو

$$a_2'(x) = a_1(x)$$

نظرية (٢):

إذا كانت المعادلة التفاضلية (1) متزاملة ذاتيا فإنه يمكن كتابتها على الصورة

$$(a_2(x)y')' + a_1(x)y = 0$$

نظرية (٣):

أى معادلة تفاضلية من الرتبة الثانية (على الصورة(١)) تصبح متزاملة ذاتيا إذا ضربت فى العامل

$$\frac{1}{a_2(x)}\exp\left(\int \frac{a_1(x)}{a_2(x)}dx\right), \qquad a_2(x) \neq 0$$

<u>ملحوظة:</u> من نظرية (3) يتضح أنه ليس هناك نقص فى التعميم إذا كتبنا المعادلة المزاملة ذاتيا

$$L(y) = (a_2(x)y')' + a_1(x)y = 0$$

على الصورة

$$L(y) = (p(x)y')' + q(x)y = 0 \qquad (3)$$

وتعرف المعادلة (3) بمعادلة "Sturm Liouville" وهى تلعب دورا كبيرا فى مسائل القيم الحدية.

مثال (٢)

ضع معادلة بسل

$$x^2y'' + xy' + (x^2 - n^2)y = 0$$

فى الصورة المزاملة ذاتيا

الحل

لدينا
$$\frac{1}{a_2}\exp\left(\int\frac{a_1}{a_2}dx\right) = \frac{1}{x^2}\exp\int\frac{x}{x^2}dx = \frac{1}{x}$$

وبضرب المعادلة المعطاة فى $\frac{1}{x}$ نحصل على

$$xy'' + y' + (x - \frac{n^2}{x})y = 0$$

أى

$$(xy')' + (x - \frac{n^2}{x})y = 0$$

وهى فى الصورة المزاملة ذاتيا.

٨ - إختزال الرتبة: Reduction of order

ليكن $y_1 = u(x)$ هو حلا للمعادلة التفاضلية

$$a_2(x)\frac{d^2y}{dx^2} + a_1(x)\frac{dy}{dx} + a_0(x)y = 0 \qquad (1)$$

ونستخدم التحويل $y_2 = y = uv$ للحصول على الحل الثانى

حيث $v = v(x)$ دالة مجهولة يراد تحديدها. وعلى ذلك فإن

$$\frac{dy}{dx} = \left(u(x)v(x)\right)' = u'v + uv' \qquad (2)$$

$$\frac{d^2y}{dx^2} = u''v + 2u'v' + uv'' \qquad (3)$$

وبالتعويض فى المعادلة المعطاة نحصل على

$$a_2(x)\left[u''v + 2u'v' + uv''\right] + a_1(x)\left[u'v + uv'\right] + a_0(x)uv = 0$$

أو

$$a_2uv'' + \left(2a_2u' + a_1u\right)v' + \left(a_2u'' + a_1u' + a_0u\right)v = 0$$

وبالتالى فإن

$$a_2u\frac{d^2v}{dx^2} + \left(2a_2u' + a_1u\right)\frac{dv}{dx} = 0$$

وبوضع $w = \frac{dv}{dx}$ نحصل على

$$a_2u\frac{dw}{dx} + \left(2a_2u' + a_1u\right)w = 0 \qquad (4)$$

وهى معادلة خطية ومنها

$$\frac{dw}{w} = -\left[2\frac{u'}{u} + \frac{a_1}{a_2}\right]dx$$

ويكون حلها هو

$$w = c \quad \exp\left[-\int -\frac{a_1(x)}{a_2(x)}dx\right] \Big/ \left[u(x)\right]^2$$

أي أن

$$v = \int w dx = \int \frac{\exp\left[-\int_0^x \frac{a_1(s)}{a_2(s)} ds\right]}{u^2(x)} dx$$

وباختبار $c = 1$ يكون الحل الثاني هو

$$y_2 = uv = y_1 \int \frac{\exp\left[-\int_0^x \frac{a_1}{a_2} ds\right]}{u^2(x)} dx$$

وهذان الحلان مستقلان خطيا لأن

$$W(u, y_1) = \begin{vmatrix} u & y_2 \\ u' & y_2' \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} u & uv \\ u' & uv' + u'v \end{vmatrix} = u^2(x)v'$$

$$= \exp\left[-\int_0^x \frac{a_1(s)}{a_2(s)} ds\right] \neq 0$$

وبذلك يكون الحل العام للمعادلة المعطاه هو

$$y = c_1 u + c_2 y_2$$

مثال

إذا كان $y = x$ هو أحد حلول المعادلة التفاضلية

$$(x^2+1)\frac{d^2y}{dx^2} - 2x\frac{dy}{dx} + 2y = 0$$

أوجد الحل الآخر المستقل خطيا بطريقة إختزال الرتبة.

الحل

حيث أن $y = x$ تحقق المعادلة المعطاة نفرض أن الحل الآخر هو $y_2 = x.v$

وبالتعويض فى المعادلة نحصل على

$$x(x^2+1)\frac{d^2v}{dx^2}+2\frac{dv}{dx}=0$$

وبوضع $w=\dfrac{dv}{dx}$ نحصل على

$$x(x^2+1)\frac{dw}{dx}+2w=0$$

وبحل هذه المعادلة التفاضلية نحصل على

$$w=\frac{c(x^2+1)}{x^2}$$

وبإختيار $c=1$ وبالتكامل نحصل على

$$v=x-\frac{1}{x}$$

ويكون الحل الثانى هو

$$y_2=x(x-\frac{1}{x})=x^2-1$$

وهذان الحلان مستقلان خطيا لأن

$$W(u,y_2)(x)=\begin{vmatrix} x & x^2-1 \\ 1 & 2x \end{vmatrix}=2x^2-x^2+1$$

$$=x^2+1\neq 0.$$

ويكون الحل العام للمعادلة على الصورة

$$y=c_1x+c_2(x^2+1)$$

حيث c_1,c_2 ثابتان إختياريان .

تمارين

١) إثبت أن $y_1 = e^{x^2}, y_2 = e^{-x^2}$ حلان للمعادلة المتجانسة المناظرة للمعادلة

$$xy'' - y' - 4x^3 y = 24x^3 e^{2x^2}$$

وبإستخدام طريقة تغيير البارامترات أوجد الحل العام للمعادلة غير المتجانسة

٢) تحقق من أن كلا من $y_1 = x, y_2 = e^x$ حل للمعادلة

$$(x-1)y'' - xy' + y = 0$$

ثم أوجد الحل العام للمعادلة

$$(x-1)y'' - xy' + y = \frac{(x-1)^2}{x} \qquad ; x \neq 1$$

٣) بالتحويل إلى الصورة القياسية، أوجد الحل العام لكل من:

$i) xy'' - 2(x-1)y' + 2(5x-1)y = 0$ $\qquad ii) x^2 y'' + xy' + (4x^2 - \frac{1}{4})y = 3x^{3/2}\sin 3x$

$iii) x^2 y'' + xy' + (4x^2 - \frac{1}{4})y = 0$ $\qquad iv) y'' + 2xy' + x^2 y = 0$

$v) x^2 y'' + xy' + (x^2 + \frac{1}{4})y = 0$

٤) بإستخدام تحليل المؤثر، أوجد الحل العام لكل من:

$i) \left[xD^2 - (x+2)D + 2\right]y = 0$ $\qquad ii) \left[xD^2 - (x+2)D + 2\right]y = x - 1$

$iii) \left[xD^2 - (3x+1)D + 3\right]y = 2(x-1)e^x$

$iv) \left[(x+1)D^2 - (3x+4)D + 3\right]y = (3x+2)e^{3x} \qquad ; D = \frac{d}{dx}$

٥) إثبت أن $xD^2+(2-x)D-1=(D-1)(xD+1)$

ثم أوجد الحل العام للمعادلة $xy''+(2-x)y'-y=2x-x^2$

٦) إذا علم أن $y_1(x)=e^{2x}$ حل للمعادلة المتجانسة المناظرة للمعادلة $(x+2)y''-(2x+5)y'+2y=2(x+2)^2e^{2x};x\neq -2$ ، فأوجد الحل العام لهذه المعادلة بإستخدام صيغة آبل.

٧) تأكد من صحة أن $y_1(x)=\dfrac{1}{x}$ حل خاص للمعادلة $xy''+(x+2)y'+y=0$ ، ثم أوجد الحل العام للمعادلة بإستخدام صيغة آبل.

٨) تحويل المعادلة بإستبدال المتغير المستقل أوجد الحل العام

(أ) $xy''+(\sin x)y'-2y\cos^3 x=2\cos^5 x$ بإستخدام التعويض $z=\sin x$

(ب) $xy''-y'+4x^3y=x^5$ (ج) $x^8y''+3x^7y'+x^2a^2y=1$ ، a ثابت

(د) $xy''+(2x^2-1)y'-24x^3y=4x^3\sin x^2$ بإستخدام التعويض $z=x^2$

(ه) $y''-y'\cot x-y\sin^2 x=\cos x-\cos^3 x$ (و) $y''-y'\cot x-y\sin^2 x=0$

٩) إستخدم طريقة تغيير البارامترات لحل المعادلة

$$x^2y''+xy'-y=x^2e^x$$

إذا كان حل الدالة المتممة هو $ax+(b/x)$

١٠) تأكد من أن x,e^x هما حلين للمعادلة المتجانسة المناظرة للمعادلة

$$(1-x)y''+xy'-y=2(x-1)^2e^{-x},\qquad 0<x<1$$

ثم أوجد حلها العام

١١) إستخدم طريقة تغيير البارامترات لحل المعادلة

$$\left[(x-1)D^2-xD+1\right]y=(x-1)^2$$

إذا كان x,e^x هما حلان للمعادلة المتجانسة المناظرة.

١٢) أوجد حل المعادلات التالية بتحويلها إلى الصورة القياسية

$(i)y''-(2\tan x)y'+5y=0 \qquad (ii)y''-(2\tan x)y'+5y=\sec x.e^x$

$(iii)y''-\dfrac{2}{x}y'+(n^2+\dfrac{2}{x^2})y=0 \qquad (iv)x\dfrac{d}{dx}\left(x\dfrac{dy}{dx}-y\right)-2x\dfrac{dy}{dx}+2y+x^2y=0$

$(v)\dfrac{d}{dx}\left(\cos^2 x\dfrac{dy}{dx}\right)+y\cos^2 x=0 \qquad (vi)(y''+y)\cot x+2(y'+y\tan x)=\sec x.$

١٣) أوجد حل المعادلات التالية بإستخدام المؤثرات

$(i)\left[xD^2+(1-x)D-1\right]y=e^x \qquad i.e.\left[(xD+1)(D-1)\right]y=e^x$

$(ii)\left[(x+2)D-1\right](D-2)y=(x+1)e^x \qquad (iii)(xD-2)(D+1)y=x^3$

$(iv)(xD-2)(D-1)y=x^2 \qquad (v)\left[(x+3)D-1\right](D-2)y=(x+3)^2e^x$

$(vi)(xD-1)(D+1)y=x^2$

١٤) إثبت أن المعادلات التالية تامة وأوجد حلها

$(i)x(1+x)y''+(x-1)y'-y=x^2 \qquad (ii)(1-x^2)y''+(1-3x)y'-y=0$

$(iii)xy''+(3+2x)y'+2y=2+e^{-2x} \qquad (iv)y''+\cos xy'-y\sin x+2y\sin x=0$

$(v)(\sin^2 x)y''=2y \qquad (vi)xy''+(1-x)y'-y=e^x$

$(vii)x^2y''+3xy'+y=\dfrac{1}{(1-x)^2}.$

١٥) أكتب المعادلة المزاملة لكل من

$$(i)\,y'' + 6xy' - 2y = 0, \qquad (ii)\,xy'' + y' - 5y = 0$$

$$(iii)\,x^2y'' + (5x+1)y' + 6y = 0, \qquad (iv)\,y'' - \frac{1}{x}y' + (1-\frac{1}{x})y = 0$$

١٦) ضع المعادلات التالية فى صورة المعادلات المتزاملة ذاتيا

$$(i)\,xy'' + y' + 3y = 0, \qquad (ii)\,4y'' + 2y' - 6y = 0$$

$$(iii)\,x^2y'' + xy' + (x^2+1)y = 0, \qquad (iv)\,y'' - y'\tan x + 2y\sec x = 0$$

١٧) إذا كان $u(x), v(x)$ دالتين لها مشتقات متصلة حتى الرتبه الثانية

وكان
$$L(y) = \left(p(x)y'\right)' + q(x)y$$

أثبت أن

$$uL(v) - vL(u) = \frac{d}{dx}\left[p(uv' - u'v)\right]$$

تسمى هذ العلاقه بمتطابقه لاجرانج.

١٨) إذا كان $u(x), v(x)$ حلين للمعادلة المتزاملة ذاتيا

$$L(y) = \left(p(x)y'\right)' + q(x)y = 0$$

فأثبت أن

$$p(x)\left[uv' - u'v\right] = k, \qquad k = \text{ثابت}$$

تعرف هذه العلاقة بصيغة آبل (Abel`s formula)

[تنوية يلاحظ أن المقدار داخل القوس هو الرونسيكان وأن كل من الحلين تحقق المعادلة ثم ضرب الأولى فى $-v$ والثانية فى u والجمع وبالتكامل ينتج المطلوب]

١٩) إثبت أن الثابت k فى صيغة آبل السابقة يساوى صفرا إذا كان وفقط إذا كان الحلان u,v لمعادلة سترم _ليوفيل مرتبطين خطيا.

٢٠) إذا كان $y = x$ هو أحد حلول المعادلة

$$(x^2 - x + 1)y'' - (x^2 + x)y' + (x+1)y = 0$$

أوجد الحل الآخر المستقل خطيا باختزال الرتبة.

٢١) إذا كان $y = e^{2x}$ هو أحد حلول المعادلة

$$(2x+1)y'' - 4(x+1)y' + 4y = 0$$

أوجد الحل الآخر المستقل خطيا وذلك باختزال الرتبة.

الباب الرابع

حلول المعادلات التفاضلية الخطية
المتجانسة من الرتبة الثانية
باستخدام المتسلسلات (طريقة فروبنيوس)

Series Solutions of Second Order Differential Equations (Frobenious Method)

الباب الرابع

حلول المعادلات التفاضلية الخطية المتجانسة من الرتبة الثانية

بإستخدام المتسلسلات (طريقة فروبنيوس)

Series Solution of Second Order Differential Equations (Frobenious Method)

١ - مقدمة:

بعض الخواص على العلاقات التجمعية $\sum$

١ - $$\sum_{n=p}^{k} Q(n) = Q(p) + Q(p+1) + Q(P+2) + \ldots + Q(k); \quad k > p$$

حيث p ، k أعداد صحيحة.

٢ - $$\sum_{n=p}^{\infty} Q(n) a_n x^{n+p} = \sum_{n=2p}^{\infty} Q(n-p) a_{n-p} x^n$$

ومثال ذلك

$$\sum_{n=0}^{\infty} (n^2 a_n x^{n-2} + n a_n x^{n+5}) = \sum_{n=-2}^{\infty} (n+2)^2 a_{n+2} x^n + \sum_{n=5}^{\infty} (n-5) a_{n-5} x^n$$

٣ - إذا كان

$$\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n = \sum_{n=0}^{\infty} b_n x^n$$

فإن $a_n = b_n$ لجميع قيم n

وأيضاً

إذا كان

$$\sum (a_n - b_n) x^n = 0$$

فإن $a_n - b_n = 0$

ومثال ذلك

إذا كان

$$\sum_{n=0}^{\infty} nC_n x^n = C_0 x + C_1 x^2 + C_2 x^3 + \ldots + C_n x^{n+1}$$

فإن

$$\therefore\ C_1 = C_0\ ,\ 2C_2 = C_1\ ,\ 3C_3 = C_2\ ,\ \ldots, nC_n = C_{n-1}\ ,$$

أي

$$\therefore\ C_1 = C_0\ ,\ C_2 = \frac{C_0}{2!},\ C_3 = \frac{C_0}{3!}, \ldots, C_n = \frac{C_0}{n!}.$$

تعريف: متسلسلة قوى حول $x = a$

$$f(x) = C_0 + C_1(x-a) + C_2(x-a)^2 + \ldots = \sum_{n=0}^{\infty} C_n (x-a)^n$$

أما إذا كانت المتسلسلة حول $x = 0$ فإن

$$f(x) = C_0 + C_1 x + C_2 x^2 + \ldots = \sum_{n=0}^{\infty} C_n x^n$$

تعريف:

نفترض أن المعادلة

$$p_0(x)y'' + p_1(x)y' + p_2(x)y = 0$$

حيث كل من $p_0(x), p_1(x), p_2(x)$ دوال تحليلية فى x (أى يمكن التعبير عن كل منها بمتسلسة قوى فى x) فإن :

١) $x = a$ تسمى بنقطة عادية Ordinary point إذا كان $p_0(a) \neq 0$

٢) $x = a$ تسمى بنقطة شاذة أو مفرده Singular point إذا كان $p_0(a) = 0$

٣) $x = a$ تسمى بنقطة شاذة منتظمة Regular Singular Point

إذا كانت $x = a$ نقطة شاذة وكان

$$\lim_{x \to a} \frac{p_1(x)}{p_0(x)}(x-a)\ ,\quad \lim_{x \to a} \frac{p_2(x)}{p_0(x)}(x-a)^2$$

موجودتان

مثــال

صنف النقط الشاذة فى المعادلة

$$x(x-1)^2(x+2)y'' + x^2y' - (x^3+2x-1)y = 0$$

الحل

$$p_0(x) = x(x-1)^2(x+2),\ p_1(x) = x^2,\ p_2(x) = -(x^3+2x-1)$$

$p_0(x)=0$ إذا كان $x=0,\ x=1, x=-2$

نقط شاذة أما النقاط الأخرى فهي نقط عادية . وتدرس الآن النقاط الشاذة .

$(i)\ x=0$

$$\lim_{x\to 0}\frac{p_1(x)}{p_0(x)}x = \lim_{x\to 0}\frac{x^2}{(x-1)^2(x+2)} = 0$$

$$\lim_{x\to 0}\frac{p_2(x)}{p_0(x)}x^2 = \lim_{x\to 0} -\frac{x(x^3+2x-1)}{(x-1)^2(x+2)} = 0$$

$\therefore x=0$ نقطة شاذة منتظمة.

$(ii)\ x=1$

$$\therefore \lim_{x\to 1}\frac{p_1(x)}{p_0(x)}(x-1) = \infty$$

$\therefore x=1$ نقطة شاذة غير منتظمة

$(iii)\ x=-2$

$$\therefore \lim_{x\to -2}\frac{p_1(x)}{p_0(x)}(x+2) = \lim_{x\to -2}\frac{x^2}{x(x-1)^2} = \frac{-2}{9}$$

$$\lim_{x\to -2}\frac{p_2(x)}{p_0(x)}(x+2)^2 = \lim_{x\to -2}\frac{-(x^3+2x-1)(x+2)}{x(x-1)^2} = 0$$

$\therefore x=-2$ نقطة شاذة منتظمة

٢ - طريقة فروبنيوس:

لقد سبق دراسة حل المعادلة التفاضلية الخطية المتجانسة من الرتبة الثانية في صورة متسلسلة القوى في حالة إذا كانت $x = a$ نقطة عادية في الجزء الأول ، والآن سوف ندرس حالة إذا كانت $x = a$ نقطة شاذة منتظمة ، وفى هذه الحالة نفترض أن الحل على الصورة

$$y = \sum_{n=0}^{\infty} C_n (x-a)^{n+r}$$

أما إذا كان الحل حول النقطة $x = 0$ الشاذة المنتظمة فإن

$$y = \sum_{n=0}^{\infty} C_n x^{n+r}$$

ملحوظة:

إن لم تذكر النقطة فإننا نعتبر $x = 0$.

وسوف نوضح طريقة الحل بالمثال الآتى

مثال (١)

أوجد حل المعادلة التفاضلية

$$2xy'' + (x+1)y' + 3y = 0$$

في صورة متسلسلة قوى x.

الحل

النقطة $x = 0$ نقطة شاذة

$$\lim_{x \to 0} \frac{(x+1)x}{2x} = \frac{1}{2} \quad , \quad \lim_{x \to 0} \frac{3x^2}{2x} = 0$$

النقطة $x = 0$ نقطة شاذة منتظمة.

نفترض أن الحل على الصورة

$$y=\sum_{n=0}^{\infty}C_n x^{n+r}$$

$$y^{\backslash}=\sum_{n=0}^{\infty}C_n(n+r)x^{n+r-1}\quad,\quad y^{\backslash\backslash}=\sum_{n=0}^{\infty}C_n(n+r)(n+r-1)x^{n+r-2}$$

بالتعويض فى المعادلة التفاضلية المعطاه نحصل على

$$\sum_{n=0}^{\infty}2C(n+r)(n+r-1)x^{n+r-1}+\sum_{n=0}^{\infty}C_n(n+r)x^{n+r}+\sum_{n=0}^{\infty}C_n(n+r)x^{n+r-1}+\sum_{n=0}^{\infty}3C_n x^{n+r}=0$$

$$\sum_{n=0}^{\infty}C_n(n+r)(2n+2r-1)x^{n+r-1}+\sum_{n=0}^{\infty}C_n(n+r+3)x^{n+r}=0$$

بمساواة معاملات x^{n+r-1} بالصفر (أقل قوى x)

$$C_n(n+r)(2n+2r-1)+C_{n-1}(n+r+2)=0 \qquad (1)$$

نضع $n=0$ فى المعادلة (1) فنحصل على

$$C_0 r(2r-1)+C_{-1}(r+2)=0$$

حيث إن $C_{-1}=C_{-2}=\dots=0$

فإن

$$C_0 r(2r-1)=0$$

وبإعتبار أن $C_0\neq 0$ نحصل على

$$r(2r-1)=0 \qquad (2)$$

المعادلة (2) تسمى المعادلة الدليلية (indicial equation) ومنها نجد أن

$$r=0\ ,\quad r=\frac{1}{2}$$

من المعادلة (1) نحصل على العلاقة التكرارية (recurrence relation)

$$C_n=\frac{-(n+r+2)}{(n+r)(2n+2r-1)}C_{n-1}\ ,\qquad n\geq 1$$

وسوف نوجد قيم C_n المختلفة بدلالة $C_0\neq 0$ فى حالتى جذرى المعادلة الدليلية (2)

١) $: r = 0$

$$\therefore\ C_n = \frac{-(n+2)}{n(2n-1)} C_{n-1}\ , \qquad n \geq 1$$

$$\therefore\ C_1 = \frac{-3}{1(1)} C_0 = -3C_0$$

$$C_2 = \frac{-4}{2(3)} C_1 = \frac{(-4)(-3)}{(2)(3)} C_0 = 2C_0$$

$$C_3 = \frac{-5}{(3)(5)} C_2 = \frac{(-5)(2)}{(3)(5)} C_0 = \frac{-2}{3} C_0\ , \ldots$$

٢) $: r = \dfrac{1}{2}$

$$C_n = \frac{-(n+5/2)}{(n+1/2)} C_{n-1}$$

$$\text{or}\ C_n = \frac{-(2n+5)}{2n(2n++1)} C_{n-1}\ , \quad n \geq 1$$

$$C_1 = \frac{-7}{2(3)} C_0 = \frac{-7}{6} C_0$$

$$C_2 = \frac{-9}{(4)(5)} C_1 = \frac{9(7)}{(4)(5)(6)} C_0 = \frac{21}{40} C_0$$

$$C_3 = \frac{-11}{(6)(7)} C_2 = \frac{(-11)(21)}{(6)(7)(40)} C_0 = \frac{-11}{80} C_0\ , \ldots$$

وبفرض $C_0 = 1$ فإن الحل العام يكون

$$y = A_1 \sum_{n=0}^{\infty} C_n x^{n+0} + A_2 \sum_{n=0}^{\infty} C_n x^{n+1/2}$$

$$\therefore\ y = A_1[1 - 3x + 2x^2 - \frac{2}{3}x^3 + \ldots] + A_2[1 - \frac{7}{6}x + \frac{21}{40}x^2 - \frac{11}{80}x^3 + \ldots]x^{1/2}\ .$$

ملحوظة:

فى المثال السابق لاحظنا عند حل المعادلة الدليلية أن جذرى المعادلة $r=\frac{1}{2}\ ,\ r=0$ أى أنهما مختلفان والفرق بينهما عدد كسرى ، وسوف نلاحظ أن هناك ثلاث حالات لجذرى المعادلة الدليلية، كما يأتى

حالات جذرى المعادلة الدليلية:

١) مختلفان والفرق بينهما عدد كسرى.

٢) متساويان.

٣) مختلفان والفرق بينهما عدد صحيح.

الحالة الاولى:

الجذران مختلفان والفرق بينهما عدد كسرى.

لقد درسنا الحالة الأولى فى المثال السابق ، ونعرض مثالا أخر

مثال (٢)

أوجد حل المعادلة التفاضلية

$$2x(1-x)y'' + (1-x)y' + 3y = 0$$

فى صورة متسلسلة قوى فى x.

الحل

نرى أن $x=0$ نقطة شاذة وحيث أن

$$\lim_{x\to 0}\frac{(1-x)x}{2x(1-x)}=\frac{1}{2}\quad ,\qquad \lim_{x\to 0}\frac{3x^2}{2x(1-x)}=0$$

فإن $x=0$ نقطة شاذة منتظمة

نفترض أن الحل على الصورة

$$y=\sum_{n=0}^{\infty}C_n x^{n+r}$$

$$y'=\sum_{n=0}^{\infty}C_n(n+r)x^{n+r-1} \quad , \qquad y''=\sum_{n=0}^{\infty}C_n(n+r)(n+r-1)x^{n+r-2}$$

بالتعويض فى المعادلة التفاضلية نحصل على

$$\sum_{n=0}^{\infty}2C_n(n+r)(n+r-1)x^{n+r-1}-\sum_{n=0}^{\infty}2C_n(n+r)(n+r-1)x^{n+r}+$$

$$\sum_{n=0}^{\infty}C_n(n+r)x^{n+r-1}-\sum_{n=0}^{\infty}C_n(n+r)x^{n+r}+\sum_{n=0}^{\infty}3C_n x^{n+r}=0$$

بمساواة معامل x^{n+r-1} بالصفر

$$\therefore\ 2C_n(n+r)(n+r-1)-2C_{n-1}(n+r-1)(n+r-2)+$$
$$C_n(n+r)-C_{n-1}(n+r-1)+3C_{n-1}=0$$

$$\therefore\ (n+r)(2n+2r-1)-C_{n-1}[(n+r-1)(2n+2r-3)-3]=0$$

$$\therefore\ C_n(n+r)(2n+2r-1)-C_{n-1}[2(n+r)^2-5(n+r)]=0$$

$$\therefore\ C_n(n+r)(2n+2r-1)-C_{n-1}(n+r)(2n+2r-5)=0 \qquad (1)$$

نضع $n=0$

$$\therefore\ C_0 r(2r-1)-C_{-1}r(2r-5)=0$$

حيث $C_{-1}=0$ و $C_0\neq 0$ إختيارية

$\therefore$ المعادلة الدليلية هي

$$r(2r-1)=0$$
$$\therefore\ r=0\ ,\ \tfrac{1}{2}$$

من المعادلة (1) نحصل على

$$\therefore C_n = \frac{(n+r)(2n+2r-5)}{(n+r)(2n+2r-1)} C_{n-1} \;;\; n \geq 1$$

بالتعويض عن جذرى المعادلة الدليلية

١) $r = 0$

$$\therefore \quad C_n = \frac{n(2n-5)}{n(2n-1)} C_{n-1} \quad , \quad n \geq 1$$

$$\therefore \quad C_n = \frac{2n-5}{2n-1} C_{n-1}$$

$$C_1 = \frac{-3}{1} C_0 = -3C_0 \quad , \quad C_2 = \frac{-1}{3} C_1 = C_0 \quad , \quad C_3 = \frac{1}{5} C_2 = \frac{1}{5} C_0 \quad , \quad \dots \; .$$

$$y_1 = \sum_{n=0}^{\infty} C_n x^n = [1 - 3x + x^2 + \frac{1}{5} x^3 + \dots] C_0$$

٢) $r = \frac{1}{2}$

$$\therefore \quad C_n = \frac{(n+\frac{1}{2})(2n-4)}{(n+\frac{1}{2})(2n)} C_{n-1} \quad , \qquad n \geq 1$$

$$\therefore \quad C_n = \frac{n-2}{n} C_{n-1} \quad , \qquad n \geq 1$$

$$\therefore \quad C_1 = \frac{-1}{1} C_0 = -C_0 \quad , \quad C_2 = 0 = C_3 = C_4 =$$

$$\therefore \quad y_2 = \sum_{n=0}^{\infty} C_n x^{n+1/2} = [1 - x] C_0 x^{1/2}$$

حيث إن C_0 إختيارية ،نعتبر $C_0 = 1$

$\therefore$ الحل العام يكون على الصورة

$$y = A[1 - 3x + x^2 + \frac{1}{5} x^3 + \dots] + B[1 - x]\sqrt{x}$$

حيث A , B ثابتان إختياريان

الحالة الثانية :

الجذران متساويان

فـــى هـــذه الحالـــة نجـــد $r = r_2$, $r = r_1$ أي أن $r_1 = r_2$ ويكـــون $y_1 = \sum C_n x^{n+r_1}$ وبذلك نحصل على حل واحد فقط ، لكن للحصول على الحل الثانى المستقبل خطيا ، نفرض $y_1 = f(x, r_1)$ ؛ ولقد ثبت أن الحل الثانى يكون على الصورة

$$y_2 = \frac{\partial f(x,r)}{\partial r}\Big|_{r=r_1}$$

ويكون الحل العام

$$y = Ay_1 + By_2$$

حيث A, B ثابتان إختياريان،

مثال (٣)

أوجد حل المعادلة التفاضلية

$$x^2 y'' + 3xy' + (1-2x)y = 0$$

في صورة متسلسلة قوى في x .

الحل

نرى أن $x = 0$ نقطة شاذة وعلى ذلك فإن

$$\lim_{x \to 0} \frac{3x}{x^2} x = 3 \quad , \quad \lim_{x \to 0} \frac{(1-2x)x^2}{x^2} = 1$$

$\therefore x = 0$ نقطة شاذة منتظمة .

نفترض أن الحل على الصورة

$$y=\sum_{n=0}^{\infty} C_n x^{n+r}$$

$$\therefore y'=\sum_{n=0}^{\infty} C_n(n+r)x^{n+r-1} \quad , \quad y''=\sum_{n=0}^{\infty} C_n(n+r)(n+r-1)x^{n+r-2}$$

بالتعويض في المعادلة التفاضلية المعطاة ، نحصل على

$$\therefore \sum_{n=0}^{\infty} C_n(n+r)(n+r-1)x^{n+r}+\sum_{n=0}^{\infty} 3C_n(n+r)x^{n+r}+$$

$$\sum_{n=0}^{\infty} C_n x^{n+r}-\sum_{n=0}^{\infty} 2C_n x^{n+r+1}=0$$

بمساواة معامل x^{n+r} بالصفر (أقل أس)

$$\therefore C_n(n+r)(n+r-1)+3C_n(n+r)+C_n-2C_{n-1}=0$$

$$\therefore C_n[(n+r)(n+r+2)+1]=2C_{n-1}$$

$$\therefore C_n(n+r+1)^2=2C_{n-1} \qquad (1)$$

بوضع $n=0$

$$\therefore C_0(r+1)^2=2C_{-1}$$

حيث $C_{-1}=0$ ، $C_0\neq 0$ اختيارية

$$\therefore r=-1,-1$$

أي أن جذري المعادلة الدليلية متساويان

من (1) نحصل على العلاقة التكرارية :

$$C_n=\frac{2}{(n+r+1)^2}C_{n-1} \ , \quad n\geq 1$$

نوجد قيم $C_1, C_2, C_3, \ldots$ بدلالة r

$$\therefore C_1 = \frac{2}{(r+2)^2} C_0$$

$$C_2 = \frac{2}{(r+3)^2} C_1 = \frac{2^2}{[(r+2)(r+3)]^2} C_0$$

$$C_3 = \frac{2}{(r+4)^2} C_2 = \frac{2^3}{[(r+2)(r+3)(r+4)]^2} C_0$$

.

.

$$C_n = \frac{2^n}{[(r+2)(r+3)(r+4)\ldots(r+n+1)]^2} C_0$$

وبافتراض $C_0 = 1$ حيث انها اختيارية ويكون الحل الأول كما يأتى

$$x > 0 \quad , \quad y_1(x,r) = x^r + \sum_{n=1}^{\infty} C_n(r) x^{n+r}$$

حيث إن

$$C_n(r) = \frac{2^n}{[(r+2)(r+3)\ldots(r+n+1)]^2} \quad , \quad n \geq 1$$

$$y_1(x,r) = x^r \left[1 + \frac{2}{(r+2)^2} x + \frac{2^2}{(r+2)^2 (r+3)^2} x^2 + \frac{2^3}{(r+2)^2 (r+3)^2 (r+4)^2} x^3 + \ldots \right]$$

$$y_1(x,-1) = x^{-1} \left[1 + 2x + x^2 + \frac{2}{9} x^3 + \ldots \right]$$

كما أن

$$\frac{\partial y_1(x,r)}{\partial r}=x^r\ln x\left[1+\frac{2}{(r+2)^2}x+\frac{2^2}{(r+2)^2(r+3)^2}x^2+\ldots\right]$$

$$+x^r\left[\frac{-4}{(r+2)^3}x-4\left[\frac{2^2}{(r+2)^3(r+3)^2}+\frac{2}{(r+2)^2(r+3)^3}\right]x^2+\ldots\right]$$

$$y_2(x,-1)=\frac{\partial y_1(x,r)}{\partial r}\Big|_{r=-1}=x^{-1}\ln x\left[1+2x+x^2+\frac{2}{9}x^3+\ldots\right]+$$

$$x^{-1}\left[-4x-4\left[\frac{2}{4}+\frac{2}{8}\right]x^2+\ldots\right]$$

ويكون الحل العام هو

$$\therefore\ y=(A+B\ln x)x^{-1}\left[1+2x+x^2+\frac{2}{9}x^3+\ldots\right]-Bx^{-1}\left[4x+3x^2+\ldots\right]$$

الحالة الثالثة :

الفرق بين جذرى المعادلة الدليلية عدد صحيح موجب

في هذه الحالة يكون جذرا المعادلة الدليلية r_1,r_2 حيث $r_2>r_1$ فإن r_2-r_1 يكون عدداً صحيحاً موجباً .

في هذه الحالة يعطى r_2 (أكبر الجذرين) حلا ، وليكن y_2 في حين يعطى الجذر r_1 حلا وقد لا يعطى ، في حالة إذا وجد الحل y_1 من r_1 فإن الحل العام يكون

$$y=Ay_1+By_2$$

حيث A,B ثابتان اختياريان

بينما فى حالة أن r_1 لايعطى حلاً فإننا نضع $C_0=b_0(r-r_1)$ فى الحل الناتج ، وليكن الحل بعد التعويض ، على الصورة $\bar{y}$ فإن الحل العام يكون

$$y=A\,\bar{y}\Big|_{r=r_1}+B\,\frac{\partial\bar{y}}{\partial r}\Big|_{r=r_1}$$

حيث r_1 أصغر الجذرين.

مثال (٤)

أوجد حل المعادلة التفاضلية

$$xy'' - 3y' + xy = 0$$

فى صورة متسلسلة قوى x.

الحل

حيث إن $x = 0$ نقطة شاذة فإن

$$\therefore \lim_{x\to 0} \frac{-3x}{x} = -3 \quad , \quad \lim_{x\to 0} \frac{x^3}{x} = 0$$

$\therefore x = 0$ نقطة شاذة منتظمة .

نفترض الحل على الصورة

$$\therefore \; y = \sum_{n=0}^{\infty} C_n x^{n+r} \quad , \; y' = \sum_{n=0}^{\infty} C_n (n+r) x^{n+r-1}$$

$$y'' = \sum_{n=0}^{\infty} C_n (n+r)(n+r-1) x^{n+r-2}$$

بالتعويض فى المعادلة التفاضلية المعطاه

$$\sum_{n=0}^{\infty} C_n (n+r)(n+r-1) x^{n+r-1} - \sum_{n=0}^{\infty} 3C_n (n+r) x^{n+r-1} + \sum_{n=0}^{\infty} C_n x^{n+r+1} = 0$$

بمساواة معامل x^{n+r-1} بالصفر نحصل على

$$C_n (n+r)(n+r-4) + C_{n-2} = 0 \qquad (1)$$

بوضع $n = 0$ ، تصبح (1) على الصورة

$$C_0 r(r-4) + C_{-2} = 0$$

وحيث إن $C_{-2} = 0$, $C_0 \neq 0$ اختيارية

$\therefore$ المعادلة الدليلية تكون على الصورة

$r(r-4)=0$ أي $r_1=0\ ,\ r_2=4$

نلاحظ أن $r_2-r_1=4$ (عدد صحيح موجب)

وتكون العلاقة التكرارية من (1) هي

$$C_n=-\frac{1}{(n+r)(n+r-4)}C_{n-2}\quad ,\quad n\geq 2$$

واضح أن $C_1=0$ بوضع $n=1$ وبالتالى فإن $C_{2n+1}=0$ أى أن جميع المعاملات الفردية تتلاشى

$$C_2=-\frac{1}{(r-2)(r+2)}C_0$$

$$C_4=-\frac{1}{r(r+4)}C_2=\frac{(-1)^2}{(r-2)r(r+2)(r+4)}C_0\ ,\ldots$$

$$C_6=-\frac{1}{(r+6)(r+2)}C_4=\frac{-1}{(r-2)r(r+2)^2(r+4)(r+6)}C_0$$

وبالتالى فإن الحل بدلالة r يكون على الصوة

$$y(x,r,C_0)=C_0x^r[1-\frac{1}{(r-2)(r+2)}x^2+\frac{1}{(r-2)r(r+2)(r+4)}x^4-$$
$$\frac{1}{(r-2)r(r+2)^2(r+4)(r+6)}x^6+\ldots]$$

نلاحظ عند وضع $r=4$ فإن كل المعاملات تكون معرفه لكن عند وضع $r=0$ فإن كل المعاملات بدءاً من معامل x^4 تكون غير معينة (غير محددة) لذلك نضع $C_0=b_0(r-0)$ $\Leftarrow$ $C_0=b_or$ نحصل على

$$\bar{y} = b_0 x^r [r - \frac{r}{(r-2)(r+2)} x^2 + \frac{1}{(r-2)(r+2)(r+4)} x^4$$
$$- \frac{1}{(r-2)(r+2)^2(r+4)(r+6)} x^6 + ...]$$

ويكون الحل الأول هو

$$y_1 = \bar{y}|_{r=0}$$
$$= b_0[-\frac{1}{16}x^4 + \frac{1}{(16)(12)}x^6 - ...]$$
$$\frac{\partial \bar{y}}{\partial r} = \bar{y}\ln x + b_0 x^r [1 - (\frac{1}{(r-2)(r+2)} - \frac{r}{(r-2)^2(r+2)} - \frac{r}{(r-2)(r+2)^2})x^2 -$$
$$(\frac{1}{(r-2)^2(r+2)(r+4)} + \frac{1}{(r-2)(r+2)^2(r+4)} + \frac{1}{(r-2)(r+2)(r+4)^2})x^4 + ...]$$

ويكون الحل الثاني هو

$$y_2 = \frac{\partial \bar{y}}{\partial r}|_{r=0} = y_1 \ln x + b_0\left[1 - (\frac{-1}{4})x^2 - (\frac{1}{32} + \frac{-1}{32} + \frac{-1}{64})x^4 + ...\right]$$
$$= y_1 \ln x + b_0\left[1 + \frac{1}{4}x^2 + \frac{1}{64}x^4 + ...\right]$$

ويكون الحل العام

$$y = Ay_1 + By_2$$

على ذلك فإن

$$y = (A + B\ln x)(\frac{-x^4}{16} + \frac{x^6}{192} - ...) + B(1 + \frac{x^2}{4} + \frac{x^4}{64} + ...)$$

حيث A, B ثابتان أختياريان

مثال (٥)

أوجد حل المعادلة التالية فى صورة متسلسلة لا نهائية

$$(x-x^2)y'' - 3y' + 2y = 0$$

الحل

حيث إن $x=0$ نقطة شاذة فإن

$$\lim_{x\to 0}\frac{-3x}{x(1-x)} = -3 \quad , \quad \lim_{x\to 0}\frac{2x^2}{x(1-x)} = 0$$

$\therefore$ $x=0$ نقطة شاذة منتظمة

نفترض أن الحل على الصورة

$$y=\sum_{n=0}^{\infty} C_n x^{n+r}$$

بالتعويض فى المعادلة التفاضلية المعطاه نحصل على

$$\sum_{n=0}^{\infty} C_n(n+r)(n+r-1)x^{n+r-1} - \sum_{n=0}^{\infty} C_n(n+r)(n+r-1)x^{n+r} - \sum_{n=0}^{\infty} 3C_n(n+r)x^{n+r-1} +$$
$$\sum_{n=0}^{\infty} 2C_n x^{n+r} = 0$$

بمساواة مجموع معاملات x^{n+r-1} بالصفر (أقل أس في المعادلة) نجد أن

$$C_n(n+r)(n+r-1) - C_{n-1}(n+r-1)(n+r-2) - 3C_n(n+r) + 2C_{n-1} = 0$$
$$C_n(n+r)(n+r-4) - C_{n-1}(n+r)(n+r-3) = 0 \qquad (1)$$

بوضع $n=0$ فى (1) فنحصل على

$$\therefore\ C_0 r(r-4) - C_{-1} r(r-3) = 0$$

حيث $C_{-1}=0$ و $C_0 \neq 0$ أختيارية

$\therefore$ المعادلة الدليلية هي

$$r(r-4)=0 \Rightarrow r=0,\ r=4$$

أَى أن الفرق بين جذرى المعادلة الدليلية عدد صحيح موجب (الحالة الثالثة) و على ذلك ومن (1) فإن العلاقة التكرارية

$$C_n = \frac{(n+r)(n+r-3)}{(n+r)(n+r-4)} C_{n-1}$$

$$C_n = \frac{n+r-3}{n+r-4} C_{n-1} \quad , \; n \ge 1$$

$$C_1 = \frac{r-2}{r-3} C_0$$

$$C_2 = \frac{r-1}{r-2} C_1 = \frac{r-1}{r-2} * \frac{r-2}{r-3} C_0 = \frac{r-1}{r-3} C_0$$

$$C_3 = \frac{r}{r-1} C_2 = \frac{r}{r-1} * \frac{r-1}{r-3} C_0 = \frac{r}{r-3} C_0$$

$$C_4 = \frac{r+1}{r-3} C_0 \;, \; C_5 = \frac{r+2}{r-3} C_0 \,, \ldots$$

نفترض أن $C_0 = 1$ نحصل على

$$y(x,r) = x^r \left[1 + \frac{r-2}{r-3} x + \frac{r-1}{r-3} x^2 + \frac{r}{r-3} x^3 + \frac{r+1}{r-3} x^4 + \frac{r+2}{r-3} x^5 + \ldots \right]$$

حيث إن جميع المعاملات معرفة عند $r = 0$ (الجذر الأصفر) على ذلك فإن

$$y_1 = y(x,4) = x^4 \left[1 + 2x + 3x^2 + 4x^5 + 5x^4 + \ldots \right]$$

ملحوظة يمكن كتابة الحل y_1 على الصورة

$$y_1 = \frac{x^4}{(1-x)^2} \;, \; |x| < 1$$

ويكون الحل الثاني هو

$$y_2 = y(x,0) = \left[1 + \frac{2}{3} x + \frac{1}{3} x^2 + 0 - \frac{1}{3} x^4 - \frac{2}{3} x^5 - \frac{3}{3} x^6 - \frac{4}{3} x^7 - \ldots \right]$$

$$= 1 + \frac{2}{3} x + \frac{1}{3} x^2 - \frac{1}{3} y_1 .$$

أى أن الحل العام

$$y = Ay_1 + By_2$$

حيث A, B ثابتان أختياريان

$$y = Ay_1 + B[1+\frac{2}{3}x+\frac{1}{3}x^2-\frac{1}{3}y_1]$$

$$y = Cx^4[1+2x+3x^2+4x^3+\ldots]+B[1+\frac{2}{3}x+\frac{1}{3}x^2]$$

حيث $C = A-\frac{1}{3}B$

مثال (٦)

أثبت أن حل المعادلة التفاضلية

$$xy'' + y' - y = 0$$

يمكن كتابته على الصورة

$$y = (A+B\ln x)\sum_{n=0}^{\infty}\frac{x^n}{(n!)^2} - 2B\sum_{n=0}^{\infty}\frac{x^n}{(n!)^2}H_n$$

حيث A, B ثابتان أختياريان ، $H_n = \sum_{k=1}^{n}\frac{1}{k}$

الحل

حيث إن $x = 0$ نقطة شاذة

$$\lim_{x\to 0}\frac{x}{x} = 1 \quad , \quad \lim_{x\to 0}\frac{-x^2}{x} = 0$$

$\therefore$ $x = 0$ نقطة شاذة منتظمة

نفترض أن الحل على الصورة

$$y = \sum_{n=0}^{\infty}C_n x^{n+r}$$

بالتعويض فى المعادلة التفاضلية المعطاه

$$\sum_{n=0}^{\infty}C_n(n+r)(n+r-1)x^{n+r-1} + \sum_{n=0}^{\infty}C_n(n+r)x^{n+r-1} - \sum_{n=0}^{\infty}C_n x^{n+r} = 0$$

بمساواة مجموع معاملات x^{n+r-1} بالصفر فنحصل على

$$\therefore\ C_n(n+r)(n+r)-C_{n-1}=0 \qquad (1)$$

نضع $n=0$ فى (1) نحصل على

$$\therefore\ C_0 r^2 - C_{-1} = 0$$

حيث إن $C_{-1}=0$, $C_0 \neq 0$ أختيارية

$\therefore$ وتكون المعادلة الدليلية

$$r^2 = 0 \quad \Rightarrow \quad r = 0,0$$

$\therefore$ الجذران متساويان

من (1) ، نحصل على العلاقة التكرارية

$$C_n = \frac{1}{(n+r)^2} C_{n-1} \qquad , \ n \geq 1$$

نوجد قيم $C_1, C_2, C_3, \ldots$ بدلالة r

$$\therefore C_1 = \frac{1}{(r+1)^2} C_0$$

$$C_2 = \frac{1}{(r+2)^2} C_1 = \frac{1}{(r+1)^2 (r+2)^2} C_0$$

$$\therefore C_3 = \frac{1}{(r+1)^2 (r+2)^2 (r+3)^2} C_0 \quad , \quad C_4 = \frac{1}{(r+1)^2 (r+2)^2 (r+3)^2 (r+4)^2} C_0 \ , \ \ldots$$

وبإفتراض أن $C_0 = 1$ ، يكون الحل الأول هو

$$y_1(x,r)=x^r[1+\frac{1}{(r+1)^2}x+\frac{1}{(r+1)^2(r+2)^2}x^2+\frac{1}{(r+1)^2(r+2)^2(r+3)^2}x^3+$$
$$\frac{1}{(r+1)^2(r+2)^2(r+3)^2(r+4)^2}x^4+\ldots]$$

$$\therefore y_1=y_1(x,r)\big|_{r=0}=1+\frac{x}{(1!)^2}+\frac{x^2}{(2!)^2}+\frac{x^3}{(3!)^2}+\frac{x^4}{(4!)^2}+\ldots=\sum_{n=0}\frac{x^n}{(n!)^2}$$

ويكون الحل الثاني هو

$$y_2(x,r)=\frac{\partial y_1(x,r)}{\partial r}=x^r\ln x[1+\frac{1}{(r+1)^2}x\frac{1}{(r+1)^2(r+2)^2}x^2+\ldots]$$
$$+x^r[\frac{-2}{(r+1)^3}x-2[\frac{1}{(r+1)^3(r+2)^2}+\frac{1}{(r+1)^2(r+2)^3}]x^2-$$
$$2[\frac{1}{(r+1)^3(r+2)^2(r+3)^2}+\frac{1}{(r+1)^2(r+2)^3(r+3)^2}+$$
$$\frac{1}{(r+1)^2(r+2)^2(r+3)^3}]x^3\ldots]$$

$$y_2(x,r)=y_1\ln x-2x^r[\frac{x}{(r+1)^2}\frac{1}{(r+1)}+\frac{x^2}{(r+1)^2(r+2)^2}(\frac{1}{r+1}+\frac{1}{r+2})$$
$$+\frac{x^3}{(r+1)^2(r+2)^2(r+3)^2}(\frac{1}{r+1}+\frac{1}{r+2}+\frac{1}{r+3})+\ldots]$$

$$y_2=y_2(x,r)\big|_{r=0}=y_1\ln x-2[\frac{x}{(1!)^2}\frac{1}{1}+\frac{x^2}{(2!)^2}(\frac{1}{1}+\frac{1}{2})+\frac{x^3}{(3!)^2}(\frac{1}{1}+\frac{1}{2}+\frac{1}{3})+\ldots]$$

اي أن

$$=y_1\ln x-2\sum_{n=1}^{\infty}\frac{x^n}{(n!)^2}\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{k}$$

على ذلك فإن حل المعادلة يمكن كتابته على الصورة

$$y=(A+B\ln x)\sum_{n=0}^{\infty}\frac{x^n}{(n!)^2}-2B\sum_{n=1}^{\infty}\frac{x^n}{(n!)^2}H_n$$

حيث A , B ثابتان اختياريان ، $H_n = \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k}$

ايجاد حل المعادلة التفاضلية في متسلسلة القوى فى حالة x كبيرة جدا

فيما سبق درسنا حل المعادلة التفاضلية

$$p_0(x)y'' + p_1(x)y' + p_2(x)y = 0 \qquad (1)$$

فى حالة متسلسلة القوى بجوار $x = a$ ، ولتكن $x = 0$ أى لقيم محدود للمتغير x وكانت $x = 0$ إما أن تكون نقطة عادية او نقطة مفردة منتظمة.

ماذا عن الحل إذا كانت $x = 0$ ، نقطة مفردة غير منتظمة ، نبحث عن الحل عندما تكون x كبيرة جدآ ، نفرض أن $w = \frac{1}{x}$ ثم نعوض فى المعادلة التفاضلية إذا كانت $w = 0$ نقطة عادية أو مفردة منتظمة فإن x عند اللا نهاية تكون نقطة عادية أو مفردة منتظمة وتحل المعادلة ، بالطرق السابقة، حيث نلاحظ أن w صغيرة جدآ ، تعنى أن x كبيرة جدآ ، ونقول إذا كانت $w = 0$ نقطة عادية (مفردة منتظمة) للمعادلة المحولة من (1) فإن المعادلة (1) لها نقطة عادية (مفردة منتظمة) فى اللانهاية.

مثال (٧)

أوجد حلول المعادلة التفاضلية التالية التى تحقق لقيم x الكبيرة جدآ

$$x^2y'' + (3x - 1)y' + y = 0 \qquad (1)$$

الحل

حيث إن $x=0$ نقطة شاذة

$$\lim_{x\to 0}\frac{(3x-1)x}{x^2}=-\infty$$

أى أن $x=0$ نقطة شاذة غير منتظمة.

لإيجاد الحلول بدلالة قيم x كبيرة جداً

نضع

$$w=\frac{1}{x} \quad\Rightarrow\quad x=\frac{1}{w}$$

$$\frac{dy}{dx}=\frac{dy}{dw}\frac{dw}{dx}=-\frac{1}{x^2}\frac{dy}{dw}=-w^2\frac{dy}{dw}$$

$$\frac{d^2y}{dx^2}=\frac{d}{dw}[-w^2\frac{dy}{dw}]\frac{dw}{dx}=\frac{-1}{x^2}[-w^2\frac{d^2y}{dw^2}-2w\frac{dy}{dw}]=w^4\frac{d^2y}{dw^2}+2w^3\frac{dy}{dw}$$

بالتعويض فى المعادلة التفاضلية المعطاه

$$\therefore \frac{1}{w^2}[w^4\frac{d^2y}{dw^2}+2w^3\frac{dy}{dw}]+[\frac{3}{w}-1](-w^2\frac{dy}{dw})+y=0$$

أو

$$w^2\frac{d^2y}{dw^2}-w(1-w)\frac{dy}{dw}+y=0 \qquad (2)$$

وعلى ذلك فإن $w=0$ نقطة شاذة منتظمة للمعادلة (2)

وبالتالي فإن النقطة عند اللانهاية تكون نقطة شاذة منتظمة للمعادلة (1)

$\therefore$ نفترض أن $y=\sum_{n=0}^{\infty}C_n w^{n+r}$ حلاً للمعادلة (2)

بالتعويض فى (2) فنحصل على

$$\sum C_n (n+r)(n+r-1) w^{n+r} - \sum C_n (n+r) w^{n+r} + \sum C_n (n+r) w^{n+r+1} + \sum C_n w^{n+r} = 0$$

بمساواة مجموع معاملات w^{n+r} بالصفر (أقل أس في المعادلة)

$$C_n (n+r)(n+r-1) - C_n (n+r) + C_n + C_{n-1}(n+r-1) = 0$$

$$C_n (n+r-1)^2 + C_{n-1}(n+r-1) = 0 \qquad (3)$$

نضع $n = 0$

$$\therefore C_0 (r-1)^2 + C_{-1}(r-1) = 0$$

وحيث $C_{-1} = 0$ ، $C_0 \neq 0$ اختيارية

$\therefore$ وتكون المعادلة الدليلية $(r-1)^2 = 0$

$$\therefore r = 1, 1$$

من المعادلة (3) ، تنتج العلاقة التكرارية

$$C_n = \frac{-1}{n+r-1} C_{n-1} \;,\; n \geq 1$$

$$\therefore C_1 = \frac{-1}{r} C_0$$

$$C_2 = \frac{-1}{r+1} C_1 = \frac{(-1)^2}{r(r+1)} C_0$$

$$C_3 = \frac{-1}{r+2} C_2 = \frac{(-1)^3}{r(r+1)(r+2)} C_0, \ldots$$

بإختيار $C_0 = 1$ ومن ذلك، فإن

$$y_1(w,r) = w^r[1-\frac{1}{r}w+\frac{(-1)^2}{r(r+1)}w^2+\frac{(-1)^3}{r(r+1)(r+2)}w^3+...]$$

$$y_1 = y_1(w,1) = w[1-w+\frac{(-1)^2w^2}{2!}+\frac{(-1)^3w^3}{3!}+...]$$

$$= w\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n}{n!}w^n$$

للحصول على الحل الثاني توجد :

$$\frac{\partial y_1(w,r)}{\partial r} = y_1(w,r)\ln w + w^r[\frac{1}{r^2}w-\frac{1}{r(r+1)}(\frac{1}{r}+\frac{1}{r+1})w^2$$

$$+\frac{1}{r(r+1)(r+2)}(\frac{1}{r}+\frac{1}{r+1}+\frac{1}{r+2})w^3...]$$

$$\frac{\partial y_1(w,r)}{\partial r}|_{r=1} = y_1\ln w + w[w-\frac{w^2}{2!}(1+\frac{1}{2})+\frac{w^3}{3!}(1+\frac{1}{2}+\frac{1}{3})+...].$$

وباعتبار $H_n = \sum_{k=1}^{n}\frac{1}{k}$ فإن

$$y_2 = y_1\ln w + w_2[H_1-\frac{w}{2!}H_2+\frac{w^2}{3!}H_3-...]$$

$$= y_1\ln w + w^2\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n-1}w^{n-1}}{n!}H_n$$

أي أن حل المعادلة (2) هو

$$y = (A+B\ln w)\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n}{n!}w^{n+1} - B\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^n}{n!}H_nw^{n+1}$$

حيث A,B ثابتان اختياريان ، $H_n = \sum_{k=1}^{\infty}\frac{1}{k}$

أي أن حل المعادلة (1) هو

$$y = [A+B\ln(\frac{1}{x})]\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^nx^{-n-1}}{n!} - B\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^nH_nx^{-n-1}}{n!}$$

مثال (٨)

حل المعادلة $4x^3y''+6x^2y'+y=0$

لقيم x الكبيرة جداً

الحل

نرى أن $x=0$ نقطة شاذة ، وعلى ذلك فإن .

$$\lim_{x\to 0}\frac{6x^2}{4x^3}x=\frac{6}{4}=\frac{3}{2}$$

$$\lim_{x\to 0}\frac{1(x-0)^2}{4x^3}=\lim_{x\to 0}\frac{1}{4x}=\infty$$

أي أن $x=0$ نقطة شاذة غير منتظمة

لذلك نضع

وعلى ذلك فإن $w=\frac{1}{x}$ ومنها $x=\frac{1}{w}$

$$\frac{dy}{dx}=\frac{dy}{dw}.\frac{dw}{dx}=\frac{-1}{x^2}\frac{dy}{dw}=-w^2\frac{dy}{dw}$$

$$\frac{d^2y}{dx^2}=\frac{d}{dw}(-w^2\frac{dy}{dw})\frac{dw}{dx}=\frac{-1}{x^2}(-w^2\frac{d^2y}{dx^2}-2w\frac{dy}{dw})$$

$$=w^4\frac{d^2y}{dw^2}+2w^3\frac{dy}{dw}$$

بالتعويض في المعادلة التفاضلية نحصل على

$$\therefore\frac{4}{w^3}(w^4\frac{d^2y}{dw^2}+2w^3\frac{dy}{dw})+\frac{6}{w^2}(-w^2\frac{dy}{dw})+y=0$$

$$4w\frac{d^2y}{dw^2}+2\frac{dy}{dw}+y=0$$

وحيث نلاحظ أن $w=0$ نقطة شاذة منتظمة

نفترض أن الحل

$$y=\sum_{n=o}^{\infty}C_n w^{n+r} \quad , \quad C_n \neq 0$$

$$y'=\sum C_n(n+r)w^{n+r-1},$$

$$y''=\sum C_n(n+r)(n+r-1)w^{n+r-2}$$

$$\therefore \quad 4\sum C_n(n+r)(n+r-1)w^{n+r-1}+2\sum C_n(n+r)w^{n+r-1}+\sum C_n w^{n+r}=0$$

$$\therefore \quad C_n[4(n+r)(n+r-1)+2(n+r)]+C_{n-1}=0$$

$$C_n(n+r)(4n+4r-2)+C_{n-1}=0 \qquad (1)$$

حيث $C_{-1}=0$ ، $C_0 \neq 0$ ، بوضع $n=0$

$$C_0(r)(4r-2)=0 \quad \Rightarrow \quad r=0\,,r=\frac{1}{2}$$

من العلاقة الرجعية (1) نحصل على

$$C_n=\frac{-1}{(n+r)(4n+4r-2)}C_{n-1} \quad , \quad n \geq 1$$

وبالتعويض فى العلاقة التكراريه

(i) $r=0$

$$C_n=\frac{-1}{n(4n-2)}C_{n-1}=\frac{-1}{2n(2n-1)}C_{n-1}$$

$$C_1=\frac{-1}{2.1}C_0 \quad , \quad C_2=\frac{-1}{3.4}C_1=\frac{(-1)^2}{4!}C_0$$

$$C_3=\frac{-1}{6.5}C_2=\frac{(-1)^3}{6.5.4!}C_0 \ ,\ldots$$

ويكون الحل الأول هو

$$y_1(w,0)=C_0[1-\frac{w}{2!}+\frac{w^2}{4!}-\frac{w^3}{6!}+...]$$

$(ii)\ r=\frac{1}{2}$

$$C_n=\frac{-1}{(n+\frac{1}{2})(4n+4.\frac{1}{2}-2)}C_{n-1}\ ,\quad n\geq 1$$

$$=\frac{-1}{(2n+1)(2n)}C_{n-1}$$

$$C_1=\frac{-1}{2.3}C_0\ ,\ C_2=\frac{-1}{4.5}C_1=\frac{(-1)^2}{5!}C_0$$

$$C_3=\frac{-1}{6.7}C_2=\frac{(-1)^3}{7!}C_0$$

ويكون الحل الثانى هو

$$y_2=C_0w^{\frac{1}{2}}[1-\frac{w}{3!}+\frac{w^2}{5!}-\frac{w^3}{7!}+...]$$

وبأخذ $C_0=1$ يكون حل المعادلة الأصلية هو

$$y=Ay_1+By_2$$

$$=A[1-\frac{x^{-1}}{2!}+\frac{x^{-2}}{4!}-\frac{x^{-3}}{6!}+...]+Bx^{-\frac{1}{2}}[1-\frac{x^{-1}}{3!}+\frac{x^{-2}}{5!}-\frac{x^{-3}}{7!}+...]$$

حيث B , A ثابتان أختياريان.

مثال(٩)

إثبت أن $x=\infty$ نقطة شاذة منتظمة للمعادلة

$$x^2y''+4xy'+2y=0 \qquad (1)$$

الحل

ليكن $x = 1/t$ أى $t = 1/x$ ومنها $\frac{dt}{dx} = -1/x^2$ (٢)

وبذلك يكون

$$y' = \frac{dy}{dx} = \frac{dy}{dt}.\frac{dt}{dx} = \frac{dy}{dt}(-\frac{1}{x^2}) = -t^2\frac{dy}{dt} \quad (3)$$

$$y'' = (-t^2\frac{d^2y}{dt^2} - 2t\frac{dy}{dt})(-t^2) = t^4\frac{d^2y}{dt^2} + 2t^3\frac{dy}{dt} \quad (4)$$

وبذلك تؤل المعادلة (1)إلى

$$\frac{1}{t^2}[t^4\frac{d^2y}{dt^2} + 2t^3\frac{dy}{dt}] + \frac{4}{t}[-t^2\frac{dy}{dt}] + 2y = 0$$

أو

$$t^2\frac{d^2y}{dt^2} - 2t\frac{dy}{dt} + 2y = 0 \quad (5)$$

وفيها نرى أن $t = 0$ نقطة شاذة منتظمة وعلى ذلك فإن $x = \infty$ نقطقة شاذة منتظمة.

مثال (١٠)

أوجد حل المعادلة

$$(1 - x^2)y'' - 2xy' + 6y = 0$$

في صورة متسلسلة القوى حول $x = \infty$

الحل

لدينا

$$(1 - x^2)y'' - 2xy' + 6y = 0 \quad (1)$$

بوضع

$$x=\frac{1}{t} \quad \therefore \quad t=\frac{1}{x} \; , \quad \frac{dt}{dx}=\frac{-1}{x^2} \tag{2}$$

$$\frac{dy}{dx}=-t^2\frac{dy}{dt} \tag{3}$$

$$\frac{d^2y}{dx^2}=t^2(2t\frac{dy}{dt}+t^2\frac{d^2y}{dt^2}) \tag{4}$$

بالتعويض فى (1) نحصل على

$$t^2(t^2-1)\frac{d^2y}{dt^2}+2t^3\frac{dy}{dt}+6y=0 \tag{5}$$

نرى أن $t=0$ نقطة شاذة منتظمة (تأكد من ذلك؟) ، وعلى ذلك نفترض أن حل المعادلة (5) على الصورة

$$y=\sum_{n=0}^{\infty} C_n t^{n+r} \quad , \quad C_0 \neq 0 \tag{6}$$

بالتعويض فى المعادلة ومساواة معامل أقل قوى t بالصفر نحصل على العلاقة التكرارية

$$(n+r-3)(n+r+2)C_n-(n+r-2)(n+r-1)C_{n-2}=0$$

وبوضع $n=0$ نحصل على المعادلة الدليلية

$$C_0(r-3)(r+2)=0$$

$$\therefore \; r=3 \; , \; r=-2$$

الجذران مختلفان والفرق بينهما عدد صحيح.

من العلاقة التكرارية نجد أن

$$C_n=\frac{(n+r-2)(n+r-1)}{(n+r-3)(n+r+2)}C_{n-2} \quad , \quad n\geq 2$$

من ذلك نرى أن

$$C_1 = C_3 = C_5 = \ldots = 0$$

$$C_2 = \frac{r(r+1)}{(r-1)(r+4)} C_0$$

$$C_4 = \frac{r(r+1)(r+2)(r+3)}{(r-1)(r+1)(r+4)(r+6)} C_0$$

$$= \frac{r(r+2)(r+3)}{(r-1)(r+4)(r+6)} C_0 ,$$

وهكذا ، وبذلك يكون الحل على الصورة

$$y = t^r C_0 [1 + \frac{r(r+1)}{(r-1)(r+4)} t^2 + \frac{r(r+2)(r+3)}{(r-1)(r+4)(r+6)} t^4 + \ldots \qquad (7)$$

بوضع $r = 3$ فى (7) ، $C_0 = 1$ نحصل على الحل الأول

$$y_1 = t^3 [1 + \frac{3.4}{2.7} t^2 + \frac{3.5.6}{2.7.9} t^4 + \ldots]$$

وبوضع $r = -2$ فى (7) ، $C_0 = 1$ نحصل على الحل الثاني

$$y_2 = t^{-2} [1 - \frac{t^2}{3}]$$

ويكون الحل العام للمعادلة (5) هو

$$y = Ay_1 + By_2$$

$$= At^3 [1 + \frac{3.4}{2.7} t^2 + \frac{3.5.6}{2.7.9} t^4] + \frac{B}{t^2} [1 - \frac{t^2}{3}]$$

أى أن

$$y = \frac{A}{x^3} [1 + \frac{3.4}{2.7} \frac{1}{x^2} + \frac{3.5.6}{2.7.9} \frac{1}{x^4}] + Bx^2 (1 - \frac{1}{3x^2})$$

حيث A , B ثابتان اختياريان

حوظة: قد تكون المعادلة التفاضلية فى صورة معادلة أويلر. ولذلك بعد التعويض
ل فى شكل متسلسلة نجد أن قوى x فى جميع الحدود متساوية والتى ينتج
ن $C_n = 0 , n \geq 1$ و الطريقة تتضح فى المثال الأتى:

(١)

نخدم طريقة فروبنيوس لإيجاد الحل بالقرب من $x = 0$ للمعادلة التفاضلية

$$x^2 y'' - xy' + y = 0$$

ـة $x = 0$ نقطة شاذة منتظمة (تأكد من ذلك؟).

ـرض أن الحل على الصورة

$$y = \sum_{n=0}^{\infty} C_n x^{n+r} \quad , \quad C_0 \neq 0$$

$$\therefore \quad y' = \sum C_n (n+r) x^{n+r-1} \quad , \quad y'' = \sum C_n (n+r)(n+r-1) x^{n+r-2}$$

بالتعويض فى المعادلة المعطاة نحصل على

$$\sum C_n (n+r)(n+r-1) x^{n+r} - \sum C_n (n+r) x^{n+r} + \sum C_n x^{n+r} = 0$$

نلاحظ هنا أن قوى x متساوية. وبمساواة معامل أقل قوى للمتغير x بالصفر ، نجد أن

$$C_n [(n+r)(n+r-1) - (n+r) + 1] = 0$$

$$C_n (n+r-1)^2 = 0 \qquad (1)$$

وبوضع $n = 0$ فى (1) نحصل على المعادلة الدليلية

$$C_0 (r-1)^2 = 0 \quad , \quad C_0 \neq 0$$

$$\therefore \; r = 1 \; , \; 1$$

الجذران متساويان. وبوضع $r=1$ فى (1) نجد أن

$$C_n n^2 = 0$$

والتى تؤدى إلى أن $C_n = 0$ لكل $n \geq 1$ وبالتالى يكون الحل على صورة

$$y = x^r \sum_{n=0}^{\infty} C_n x^n = x^r [C_0 + 0] = x^r \quad , \quad C_0 = 1$$

ويكون الحل الأول هو

$$y_1 = y(x,r)\big|_{r=1} = x$$

ويكون الحل الثاني هو

$$y_2 = \left.\frac{\partial y(x,r)}{\partial r}\right|_{r=1} = x^r \ln x \; r = 1 = x \ln x$$

وبذلك يكون الحل العام للمعادلة المعطاة على الصورة

$$y = Ay_1 + By_2 = Ax + Bx \ln x$$

حيث B, A ثابتان اختياريان.

ملاحظات : يمكن استخدام العلاقة :

$$y_2 = y_1 \cdot \int \frac{e^{-\int^x \frac{a_1(s)}{a_2(s)} ds}}{y_1^2} dx$$

في ايجاد الحل الثاني في هذه الحاله ولذلك ففي المثال السابق يكون

$$y_2 = x \int \frac{e^{-\int^x \frac{-s}{s^2} ds}}{x^2} dx = x \int \frac{e^{\ln x}}{x^2} dx = x \int \frac{x}{x^2} dx = x \ln x$$

حيث $a_1(x) = -x$ ، $a_2(x) = -x^2$ هما مما يلي المعادلة التفاضلية

$$a_2(x)\, y'' + a_1(x)\, y' + y = 0$$

٢ - عند استخدام طريقة فروبنيوس فإنه في بعض الأحيان يتطلب أن نوجد فترة التقارب للمتغير x التي تكون فيها المسلسلة اللانهائيه تقاربيه . ولا ختبار تقارب المتسلسلة .... + $u_1 + u_2 + u_3$ نستخدم اختبار النسبة الذي ينص على أن المتسلسلة $\sum_{n=1}^{\infty} u_n$ تكون تقاربية إذا كان $\lim_{n \to \infty} \left| u_{n+1} / u_n \right| < 1$

تمارين

أ) أوجد حل كل من المعادلات التفاضلية التالية فى صورة متسلسلة قوى لانهائية:

1) $2xy'' + (1+x)y' - 2y = 0$;
2) $2x(x+1)y'' + 3(x+1)y' - y = 0$;
3) $4x^2 y'' + 4xy' + (4x^2 - 1)y = 0$;
4) $x^2 y'' - x(x+1)y' + y = 0$;
5) $4x^2 y'' + (1-2x)y = 0$;
6) $xy'' + y' + xy = 0$;
7) $x^2 y'' + 2x(x-2)y' + 2(2-3x)y = 0$;
8) $xy'' + (x-1)y' - y = 0$;
9) $xy'' - (3+x)y' + 2y = 0$;

ب) أوجد حل كل من المعادلات التالية التى تحقق فى حالة x كبيرة جداً فى صورة متسلسلة لا نهائية:

a) $x^4 y'' + x(1+2x^2)y' + 5y = 0$;
b) $2x^2(x-1)y'' + x(5x-3) + (x+1)y = 0$;
c) $4x^3 y'' + 6xy' + y = 0$;

(ج) أوجد حل كل من المعادلات التفاضلية فى صورة متسلسله لا نهائية .

1) $4x^2y'' + 4xy' - y = 0$;

2) $2x^2y'' + 11xy' + 4y = 0$;

3) $x^2y'' - 6xy' = 0$;

4) $x^2y'' + 2y = 0$;

5) $x^2y'' - 3xy' + 4y = 0$;

6) $4x^2y'' + 4xy' - y = 0$.

7) $y'' + \frac{1}{x}y' = \frac{1}{16x^2}y$

8) $x^2y'' + xy' + \left(x^2 - \frac{1}{4}y\right) = 0$

9) $x^2y'' - (x+2)y = 0$

10) $(x-1)^2y'' - (x^2 - x)y' + y = 0$ حول النقطة الشاذة المنتظمة $x_0 = 1$

11) $x^2y'' + x\ y' + \left(x^2 - \frac{1}{9}\right)y = 0$

12) $y'' - 2x^2y' + 8y = 0$, $y(0) = 0$, $y''(0) = 1$

الباب الخامس

معادلة لجندر التفاضلية

Legendre Differential Equation

الباب الخامس

معادلة لجندر التفاضلية

Legendre Differential Equation

١ - المقدمة :

تسمى المعادلة على الصورة

$$(1-x^2)y'' - 2xy' + n(n+1)y = 0 \qquad (1)$$

بمعادلة لجندر التفاضلية. والحل العام للمعادلة(1) يعطى بالعلاقة

$$y = C_1P_n(x) + C_2Q_n(x) \qquad \text{و} \qquad n = 0,1,2,3,\ldots$$

حيث $P_n(x)$ كثيرات حدود تسمى كثيرات حدودلجندر من النوع الأول بينما $Q_n(x)$ تسمى دوال لجندر من النوع الثانى وهى غير محدودة عندما $x = \pm 1$ وهما حلان مستقلان للمعادلة (1)

ولحل المعادلة (1) فى صورة متسلسلة، نجد أن :

$x = 0$ نقطة عاديةٍ لذلك نفترض أن الحل على الصورة

$$y = \sum_{k=0}^{\infty} a_k x^k$$

ويكون لدينا

$$\therefore y' = \sum_{k=0} a_k k x^{k-1} \quad , \quad y'' = \sum_{k=0} a_k k(k-1)x^{k-2}$$

بالتعويض فى المعادلة (1) نحصل على

$$\sum_{k=0} a_k k(k-1)x^{k-2} - \sum_{k=0} a_k k(k-1)x^k - \sum_{k=0} 2a_k k x^k + \sum_{k=0} n(n+1)a_k x^k = 0$$

بمساواة مجموع معاملات x^{k-2} بالصفر، نحصل على

$$\therefore a_k k(k-1) - a_{k-2}(k-2)(k-3) - 2a_{k-2}(k-2) + n(n+1)a_{k-2} = 0$$
$$\therefore a_k k(k-1) - a_{k-2}[(k-2)(k-1) - n(n+1)] = 0$$
$$\therefore a_k k(k-1) = -a_{k-2}[n^2 + n - (k-2)(k-1)]$$

العلاقة التكرارية

$$a_k = -\frac{(n-k+2)(n+k-1)}{k(k-1)} a_{k-2} \ , \qquad k \geq 2$$

ومن هذه العلاقة، وباعتبار $a_0 \neq 0, a_1 \neq 0$ إختياريتين يمكن حساب جميع المعاملات بدلالة كل من a_1, a_0.

١) $a_0 \neq 0$ إختيارية

$$\therefore a_2 = \frac{-n(n+1)}{(2)(1)} a_0 = -\frac{n(n+1)}{2!} a_0$$

$$a_4 = -\frac{(n-2)(n+3)}{(4)(3)} a_2 = \frac{(n-2)n(n+1)(n+3)}{4!} a_0$$

$$a_6 = -\frac{(n-4)(n+5)}{(6)(5)} a_4 = -\frac{(n-4)(n-2)n(n+1)(n+3)(n+5)}{6!} a_0, \ldots$$

٢) $a_1 \neq 0$ إختيارية

$$a_3 = -\frac{(n-1)(n+2)}{(3)(2)} a_1 = -\frac{(n-1)(n+2)}{3!} a_1$$

$$a_5 = -\frac{(n-3)(n+4)}{(5)(4)} a_3 = \frac{(n-3)(n+1)(n+2)(n+4)}{5!} a_1$$

$$a_7 = -\frac{(n-5)(n+6)}{(7)(6)} a_5 = -\frac{(n-5)(n-3)(n-1)(n+2)(n+4)(n+6)}{7!} a_1, \ldots$$

على ذلك، يكون الحل العام على الصورة

$$y = a_0\{1 - \frac{n(n+1)}{2!}x^2 + \frac{(n-2)n(n+1)(n+3)}{4!}x^4 - \frac{(n-4)(n-2)n(n+1)(n+3)(n+5)}{6!}x^6 + ...\} + a_1\{x - \frac{(n-1)(n+2)}{3!}x^3 + \frac{(n-3)(n-1)(n+2)(n+4)}{5!}x^5 - \frac{(n-5)(n-3)(n-1)(n+2)(n+4)(n+6)}{7!}x^7 + ...\}$$

$$= a_0 y_1(x) + a_1 y_2(x)$$

من الواضح إذا كان n عدداً صحيحاً، فإن إحدى المتسلسلتين $y_1(x), y_2(x)$ سوف تنتهي(أى تكون محدودة) بمعنى أن تكون كثيرة حدود من درجة n ويرمز لها بالرمز $P_n(x)$ بينما المتسلسلة الأخرى تكون لانهائية ويرمز لها بالرمز $Q_n(x)$.

فإذا كانت n عدداً زوجياً ، فإن $y_1(x) = P_n(x)$ وتكون $P_n(x)$ دالة كثيرة حدود زوجية بينما $y_2(x) = Q_n(x)$ متسلسلة لانهائية

أما إذا كانت n عدداً فردياً فإن $y_1(x) = Q_n(x)$ متسلسلة لانهائية بينما $y_2(x) = P_n(x)$ دالة كثيرة حدود فردية.

ويكون الحل العام

$$y = c_1 P_n(x) + c_2 Q_n(x)$$

إذا كانت n عدداً صحيحاً .

وإذا أخترنا $a_0 = a_1 = 1$ بحيث يكون معامل x^n هو

$$a_n = \frac{(2n)!}{2^n (n!)^2}$$

فإن

$$P_n(x) = \sum_{m=0}^{M} (-1)^m \frac{(2n-2m)!}{2^n m!(n-m)!(n-2m)!} x^{n-2m}$$

حيث $M = \frac{n}{2}$ إذا كان n عدداً زوجياً

$M = \frac{n-1}{2}$ إذا كان n عدداً فردياً.

٢ - **صيغة رودريج: Rodrigue**

يمكن التعبير عن كثيرات حدود لجندر $P_n(x)$ بالصيغة التالية وتسمى صيغة رودريج

$$P_n(x) = \frac{1}{2^n n!} \frac{d^n}{dx^n} [(x^2-1)^n]$$

الاثبات:

نفرض أن $z = (x^2-1)^n$

$$\therefore z' = n(x^2-1)^{n-1}(2x) \Rightarrow (x^2-1)z' = 2nxz \qquad (1)$$

بتطبيق صيغة ليبنز وهي

$$(f.g)^{(n)} = f^{(n)}.g + nf^{(n-1)}.g' + \frac{n(n-1)}{2!} f^{(n-2)}.g'' + \ldots + f.g^{(n)}.$$

بتفاضل طرفي (1) $(n+1)$ مرة نحصل على

$$(x^2-1)z^{(n+2)} + (n+1)(2x)z^{(n+1)} + \frac{n(n+1)}{2!} 2z^{(n)} = 2n[xz^{(n+1)} + (n+1)z^{(n)}]$$

$$\therefore (x^2-1)z^{(n+2)} + 2xz^{(n+1)} - n(n+1)z^{(n)} = 0$$

وبافتراض أن

$$y=\frac{d^n z}{dx^n}=z^{(n)}$$

$$\therefore (1-x^2)y'' - 2xy' + n(n+1)y = 0$$

أى أن y تحقق معادلة لجندر التفاضلية ، كما أن ky تكون حلاً أيضاً للمعادلة (1).

الأن نحاول إيجاد k.

$$k\frac{d^n}{dx^n}(x^2-1)^n = P_n(x)=\sum_{m=0}^{M}(-1)^m\frac{(2n-2m)!}{2^n m!(n-m)!(n-2m)!}x^{n-2m}$$

بمساواة معاملى x^n فى الطرفين نجد أن

$$k\,2n(2n-1)(2n-2)\ldots(2n-n+1)\frac{n!}{n!}=\frac{(2n)!}{2^2(n!)^2}$$

$$\therefore k=\frac{1}{2^n n!}$$

وبالتالى فإن

$$P_n(x)=\frac{1}{2^n n!}\frac{d^n}{dx^n}[(x^2-1)^n]$$

٣ - الصور المختلفة لكثيرة حدود لجندر

بوضع $n=0$ فى صيغة رودريج نحصل على

$$1)\ P_0(x)=1$$

بوضع $n=1$ نجد أن

$$2)\ P_1(x)=\frac{1}{2^1 1!}\frac{d}{dx}(x^2-1)=\frac{1}{2}(2x)=x$$

بوضع $n=2$

$$3)\ P_2(x)=\frac{1}{2^2 2!}\frac{d^2}{dx^2}(x^2-1)^2=\frac{1}{8}\frac{d}{dx}[4x^3-4x]=\frac{4}{8}(3x^2-1)=\frac{1}{2}(3x^2-1)$$

بوضع $n=3$

$$4)\ P_3(x)=\frac{1}{2^3 3!}\frac{d^3}{x^3}(x^2-1)^3=\frac{1}{48}\frac{d^2}{dx^2}[6x^5-12x^3+6x]$$

$$=\frac{1}{8}\frac{d}{dx}[5x^4-6x^2+1]=\frac{1}{8}(20x^3-12x)$$

$$\therefore P_3(x)=\frac{1}{2}(5x^3-3x)$$

ويمكن إثبات أن

$$5)\ P_4(x)=\frac{1}{8}(35x^4-30x^2+3)$$

$$6)\ P_5(x)=\frac{1}{8}(63x^5-70x^3+15x)$$

نلاحظ أن الدوال $P_0(x),P_2(x),P_4(x),...$ زوجية ، بينما الدوال $P_1(x),P_3(x),P_5(x),...$ فردية.

٤ - الدالة المولدة لكثيرات حدود لجندر $P_n(x)$: Generating Function for $P_n(x)$

تكون الدالة المولده كثيرة حدود لجندر على الصورة

$$\frac{1}{\sqrt{1-2xh+h^2}}=\sum_{n=0}^{\infty}P_n(x)h^n$$

الأثبات:

$$\frac{1}{\sqrt{1-2xh+h^2}}=[1-2xh+h^2]^{-1/2}=1+\frac{1}{2}h(2x-h)+\frac{\left(-\frac{1}{2}\right)\left(-\frac{2}{3}\right)}{2!}h^2(2x-h)^2+...$$

$$=1+xh+\frac{1}{2}(3x^2-1)h^2+...$$

$$=P_0(x)+P_1(x)h+P_2(x)h^2+...$$

$$=\sum_{n=0}^{\infty}P_n(x)h^n$$

٥ - الخواص الأساسية لكثيرات الحدود $P_n(x)$

$$1)\ P_n(1)=1$$

الأثبات: -

نفرض $x=1$ فى الدالة المولدة

$$\therefore (1-2h+h^2)^{-1/2}=\sum P_n(1)h^n$$

$$\therefore (1-h)^{-1}=\sum_{n=0}^{\infty}P_n(1)h^n$$

لكن

$$\frac{1}{1-h}=(1-h)^{-1}=1+h+h^2+h^3+\ldots=\sum_{n=0}^{\infty}h^n$$

$$\therefore \sum_{n=0}^{\infty}P_n(1)h^n=\sum_{n=0}^{\infty}h^n$$ أي أن $P_n(1)=1$

$$2)\ P_n(-1)=(-1)^n$$

الأثبات:

نضع $x=-1$ فى الدالة المولدة

$$\therefore (1+2h+h^2)^{-1/2}=\sum_{n=0}^{\infty}P_n(-1)h^n$$

$$\therefore (1+h)^{-1}=\sum_{n=0}^{\infty}P_n(-1)h^n$$

لكن

$$(1+h)^{-1}=\frac{1}{1+h}=1-h+h^2-h^3+\ldots+(-1)^n h^n+\ldots$$

$$=\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n h^n=\sum_{n=0}^{\infty}P_n(-1)h^n$$

$$\therefore P_n(-1)=(-1)^n$$

وبالمثل نستطيع أثبات أن

$$P_n(-x)=(-1)^n P_n(x)$$

وذلك بوضع $-x$ بدلاً من x فى الدالة المولدة

$$3)\ P_n(0)=\begin{cases}0 & n \ \text{odd} \quad (\text{فردية}) \\ \dfrac{(-1)^m (2m)!}{2^{2m}(m!)^2} & n=2m \ \ \text{even} \quad (\text{زوجية})\end{cases}$$

الأثبات:

بوضع $x=0$ فى الدالة المولدة فنحصل على

$$\therefore (1+h^2)^{-1/2}=\sum_{n=0}^{\infty} P_n(0)h^n$$

$$\therefore \sum_{n=0}^{\infty} P_n(0)h^n = 1+(\frac{-1}{2})h^2+\frac{(-\frac{1}{2})(-\frac{3}{2})}{2!}h^4+\frac{(-\frac{1}{2})(-\frac{3}{2})(-\frac{5}{2})}{3!}h^6+\ldots$$

$$=1-\frac{1}{2}h^2+(-1)^2\frac{1.3}{2^2 2!}h^4+(-1)^3\frac{1.3.5}{2^3 3!}h^6+\ldots$$

من الواضح إذا كانت n فردية فإن $P_n(0)=0$ ، أما إذا كانت $n=2m$ زوجية فإن

$$P_n(0)=P_{2m}(0)=(-1)^m\frac{1.3.5\ldots(2m-1)}{2^m m!}=(-1)^m\frac{1.3.5\ldots(2m-1)}{2^m m!}.\frac{2.4\ldots 2m}{2.4\ldots 2m}$$

$$=(-1)^m\frac{(2m)!}{2^{2m}(m!)^2}$$

$$\therefore P_n(0)=\begin{cases}0 & n \ \text{odd} \quad (\text{فردية}) \\ \dfrac{(-1)^m (2m)!}{2^{2m}(m!)^2} & n=2m \ \ \text{even} \quad (\text{زوجية})\end{cases}$$

نظرية (١) : -

$$\int_{-1}^{1} f(x)P_n(x)dx = \frac{(-1)^n}{2^n n!}\int_{-1}^{1}(x^2-1)f^{(n)}(x)dx$$

البرهان: -

من صيغة رودريج و بالتكامل بالتجزيء n من المرات .

$$\int_{-1}^{1} f(x)P_n(x)dx = \frac{1}{2^n n!}\int_{-1}^{1} f(x)\frac{d^n}{dx^n}(x^2-1)^n dx$$

$$= \frac{1}{2^n n!}[f(x)\frac{d^{n-1}}{dx^{n-1}}(x^2-1)^n]_{-1}^{1} - \int_{-1}^{1}\frac{d^{n-1}}{dx^{n-1}}(x^2-1)^n f'(x)dx$$

$$= \frac{1}{2^n n!}(-1)^n \int_{-1}^{1}(x^2-1)^n f^{(n)}(x)dx$$

نتيجة : -

1) $\int_{-1}^{1}[P_n(x)]^2 dx = \frac{2}{2n+1}$

2) $\int_{-1}^{1}P_n(x)P_m(x)dx = 0 \quad , \quad m \neq n$

وتسمى خاصة التعامد **(orthogonality)**

قبل إثبات هذه النتيجة سنحتاج إلى هذه التمهيدية

تمهيدية :

$$\int_{0}^{\pi/2}\cos^{2n+1}\theta d\theta = 2^{2n}\frac{(n!)^2}{(2n+1)!}$$

البرهان : -

حيث إن

$$\beta(m,n) = 2\int_0^{\pi/2} \cos^{2n-1}\theta \sin^{2m-1}\theta d\theta$$

وعليه فإن

$$\int_0^{\pi/2} \cos^{2n+1}\theta d\theta = \frac{1}{2}\beta(\ell,s) = \int_0^{\pi/2} \cos^{2\ell-1}\theta \sin^{2s-1}\theta d\theta$$

$$2\ell = 2(n+1) \Rightarrow \ell = n+1 \ , \quad 2s-1=0 \Rightarrow s = \frac{1}{2}$$

$$\therefore \int_0^{\pi/2} \cos^{2n+1}\theta d\theta = \frac{1}{2}\beta(n+1,1/2) = \frac{1}{2}\frac{\Gamma(n+1)\Gamma(1/2)}{\Gamma(n+\frac{3}{2})}$$

$$= \frac{n!\Gamma(1/2)}{2(n+1/2)(n-1/2)\ldots\frac{3}{2}.\frac{1}{2}\Gamma(1/2)}$$

$$= \frac{2^{2n}(n!)^2}{(2n+1)!}$$

برهان النتيجة (١)

من النظرية السابقة، بوضع

$$f(x) = P_n(x) = \frac{1}{2^n n!}\frac{d^n}{dx^n}(x^2-1)^n$$

$$\therefore f^{(n)}(x) = \frac{1}{2^n n!}\frac{d^{2n}}{dx^{2n}}(x^2-1)^n = \frac{(2n)!}{2^n n!}$$

$$\int_{-1}^{1}[P_n(x)]^2 dx = \frac{(-1)^n}{2^n(n!)}\int_{-1}^{1}(x^2-1)^n \frac{(2n)!}{2^n n!}dx$$

$$= \frac{(2n)!}{2^{2n}(n!)^2}\int_{-1}^{1}(1-x^2)^n dx$$

حيث إن الدالة المكاملة زوجية

$$\int_{-1}^{1}[P_n(x)]^2 dx = \frac{2(2n)!}{2^{2n}(n!)^2}\int_{0}^{1}(1-x^2)^n dx$$

نفترض أن

$$x = \sin\theta \quad \Rightarrow \quad dx = \cos\theta d\theta$$
$$x : 0 \to 1$$
$$\theta : 0 \to \pi/2$$

$$\int_{-1}^{1}[P_n(x)]^2 dx = \frac{2(2n)!}{2^{2n}(n!)^2}\int_{0}^{\pi/2}\cos^{2n+1}\theta d\theta$$

$$= \frac{2(2n)!}{2^{2n}(n!)^2}\cdot\frac{2^{2n}\ (n!)^2}{(2n+1)!}$$

$$= \frac{2}{2n+1}$$

برهان النتيجة (٢)

باعتبار $m < n$ كما في النتيجة (١) فإن

$$\int_{-1}^{1}P_m(x)P_n(x)dx = \frac{(-1)^n}{2^n n!}\int_{-1}^{1}(x^2-1)^n\frac{d^n}{dx^n}P_m(x)dx = 0$$

باعتبار $n < m$ كما في النتيجة (١) فإن

$$\int_{-1}^{1}P_m(x)P_n(x)dx = \frac{(-1)^m}{2^m m!}\int_{-1}^{1}(x^2-1)^m\frac{d^m}{dx^m}P_n(x)dx = 0$$

مثـال(١)

أوجد قيمة

$$\int_{-1}^{1}x^4 P_2(x)dx$$

الحل

$$\int_{-1}^{1} x^4 P_2(x)dx = \frac{(-1)^2}{2^2 2!}\int_{-1}^{1}(x^2-1)^2\frac{d^2}{dx^2}x^4 dx = \frac{1}{8}\int_{-1}^{1}12x^2(x^2-1)^2 dx$$

$$= 3\int_{0}^{1}(x^6-2x^4+x^2)dx = 3[\frac{1}{7}x^7-\frac{2}{5}x^5+\frac{1}{3}x^3]_0^1$$

$$= 3[\frac{1}{7}-\frac{2}{5}+\frac{1}{3}] = \frac{87}{105} = \frac{29}{35}$$

مثال(٢)

أوجد قيمة

$$\int_{-1}^{1} x^4 P_3(x)dx$$

الحل

$$\int_{-1}^{1} x^4 P_3(x)dx = 0$$

لماذا... ؟ لأن $P_3(x)$ دالة فردية]

٢ - العلاقات التكرارية لكثيرات حدود لجندر Recurrence Relations Formulae

$$1)\ P_{n+1}(x) = \frac{2n+1}{n+1}xP_n(x) - \frac{n}{n+1}P_{n-1}(x)$$

$$2)\ P_n(x) + 2xP_n'(x) = P_{n+1}'(x) + P_{n-1}'(x)$$

$$3)\ P_{n+1}'(x) - P_{n-1}'(x) = (2n+1)P_n(x)$$

$$4)\ xP_n'(x) = P_{n-1}'(x) + nP_n(x)$$

الأثبات: -

العلاقة الأولى :

حيث إن الدالة المولدة

$$\frac{1}{\sqrt{1-2xh+h^2}}=\sum_{n=0}^{\infty}P_n(x)h^n$$

بتفاضل طرفى الدالة المولدة بالنسبة إلى h. فنحصل على

$$-\frac{1}{2}(1-2xh+h^2)^{-3/2}(-2x+2h)=\sum_{n=0}^{\infty}nP_n(x)h^{n-1}$$

$$\therefore (x-h)\sum_{n=0}^{\infty}P_n(x)h^n=(1-2hx+h^2)\sum_{n=0}^{\infty}nP_n(x)h^{n-1}$$

$$\sum_{n=0}^{\infty}xP_n(x)h^n-\sum_{n=0}^{\infty}P_n(x)h^{n+1}=\sum_{n=0}^{\infty}nP_n(x)h^{n-1}-\sum_{n=0}^{\infty}2xnP_n(x)h^n+\sum_{n=0}^{\infty}nP_n(x)h^{n+1}$$

بمساواة معامل h^n في الطرفين فنحصل على

$$xP_n(x)-P_{n-1}(x)=(n+1)P_{n+1}(x)-2nP_n(x)+(n-1)P_{n-1}(x)$$

$$\therefore (n+1)P_{n+1}(x)=(2n+1)xP_n(x)-nP_{n-1}(x)$$

$$\therefore P_{n+1}(x)=\frac{2n+1}{n+1}xP_n(x)-\frac{n}{n+1}P_{n-1}(x)$$

العلاقة الثانية :

بتفاضل طرفى الدالة المولدة بالنسبة إلى x.

$$-\frac{1}{2}(1-2xh+h^2)^{-3/2}(-2h)=\sum_{n=0}^{\infty}P_n^{\backslash}(x)h^n$$

$$\therefore h\sum_{n=0}^{\infty}P_n(x)h^n=(1-2xh+h^2)\sum_{n=0}^{\infty}P_n^{\backslash}(x)h^n$$

$$\therefore \sum_{n=0}^{\infty}P_n(x)h^{n+1}=\sum_{n=0}^{\infty}P_n^{\backslash}(x)h^n-\sum_{n=0}^{\infty}2xP_n^{\backslash}(x)h^{n+1}+\sum_{n=0}^{\infty}P_n^{\backslash}(x)h^{n+2}$$

بمساواة معامل h^{n+1} فى الطرفين نحصل على

$$\therefore P_n(x)=P_{n+1}^{\backslash}(x)-2xP_n^{\backslash}(x)+P_{n-1}^{\backslash}(x)$$

$$\therefore P_n(x)+2xP_n^{\backslash}(x)=P_{n+1}^{\backslash}(x)+P_{n-1}^{\backslash}(x)$$

العلاقة الثالثة :

بتفاضل طرفى العلاقة (1) بالنسبة ل x فنحصل على

$$\therefore P_{n+1}^{\backslash}(x)=\frac{2n+1}{n+1}[xP_n^{\backslash}(x)+P_n^{\backslash}(x)]-\frac{n}{n+1}P_{n-1}^{\backslash}(x)$$

من العلاقة الثانية والتعويض عن

$$xP_n^{\backslash}(x)=\frac{1}{2}[P_{n+1}^{\backslash}(x)+P_{n-1}^{\backslash}(x)-P_n(x)]$$

فنحصل على

$$\therefore P_{n+1}^{\backslash}(x)=\frac{2n+1}{n+1}[\frac{1}{2}(P_{n+1}^{\backslash}(x)+P_{n-1}^{\backslash}(x)-P_n(x))+P_n(x)]-\frac{n}{n+1}P_{n-1}^{\backslash}(x)$$

$$\therefore P_{n+1}^{\backslash}(x)=\frac{2n+1}{2(n+1)}P_{n+1}^{\backslash}(x)+\frac{2n+1}{2(n+1)}P_{n-1}^{\backslash}(x)+\frac{2n+1}{2(n+1)}P_n^{\backslash}(x)-\frac{n}{n+1}P_{n-1}^{\backslash}(x)$$

وبالتالي فإن

$$\therefore \frac{1}{2(n+1)}P_{n+1}'(x)=\frac{1}{2(n+1)}P_{n-1}'(x)+\frac{2n+1}{2(n+1)}P_n(x)$$

$$\therefore P_{n+1}'(x)=P_{n-1}'(x)+(2n+1)P_n(x)$$

$$\therefore P_{n+1}'(x)-P_{n-1}'(x)=(2n+1)P_n(x)$$

العلاقة الرابعة

بجمع $(3),(2)$ نحصل على

$$\therefore P_n(x)+2xP_n'(x)+P_{n+1}'(x)-P_{n-1}'(x)=P_{n+1}'(x)+P_{n-1}'(x)+(2n+1)P_n(x)$$

$$\therefore 2xP_n'(x)=2P_{n-1}'(x)+2nP_n(x)$$

$$\therefore xP_n'(x)=P_{n-1}'(x)+nP_n(x)$$

٧ - أمثلة :

مثال(١)

باستخدام العلاقات التكرارية ،أوجد $P_2(x),P_3(x)$ ، مع العلم أن

$$P_0(x)=1,P_1(x)=x$$

الحل

من العلاقة (١) نرى أن

$$P_{n+1}=\frac{2n+1}{n+1}xP_n-\frac{n}{n+1}P_{n-1}$$

نضع $n=1$ فنحصل على

$$\therefore P_2=\frac{3}{2}xP_1-\frac{1}{2}P_0=\frac{1}{2}\{3x^2-1\}$$

نضع $n=2$ فنحصل على

$$P_3 = \frac{5}{3}xP_2 - \frac{2}{3}P_1 = \frac{5}{3}x\frac{1}{2}(3x^2 - 1) - \frac{2}{3}x$$

$$P_3 = \frac{5}{2}x^3 - \frac{5}{6}x - \frac{2}{3}x$$

$$= \frac{5}{2}x^3 - \frac{3}{2}x = \frac{1}{2}(5x^3 - 3x)$$

مثـال(٢)

بإستخدام العلاقات التكرارية لدالة لجندر أثبت أن: -

$$P_6' = 11P_5 + 7P_3 + 3P_1$$

الحل

من (3) نرى أن

$$P_{n+1}'(x) = (2n+1)P_n(x) + P_{n-1}'(x)$$

نضع $n = 5$ نحصل على

$$\therefore P_6' = 11P_5 + P_4'$$

نضع $n = 3$ نحصل على

$$\therefore P_6' = 11P_5 + 7P_3 + P_2'$$

نضع $n = 1$ نحصل على

$$\therefore P_6' = 11P_5 + 7P_3 + 3P_1 + P_0'$$

ولكن ، حيث

$P_0 = 1$ فإن $P_0' = 0$

ملحوظة: -

يمكن إثبات أن: -

فى حالة n زوجى $P_n'(x) = (2n-1)P_{n-1}(x) + (2n-5)P_{n-3} + \ldots + 3P_1$

أما فى حالة n فردى

$$P_n^{\backslash}(x) = (2n-1)P_{n-1}(x) + (2n-5)P_{n-3} + \dots + 5P_2 + 1$$

مثـال(٣)

أوجد قيمة

$$\int_0^1 P_n(x)dx$$

الحل

من العلاقة

$$(2n+1)P_n(x) = P_{n+1}^{\backslash}(x) - P_{n-1}^{\backslash}(x)$$

ليكون

$$\therefore \int_0^1 P_n(x)dx = \frac{1}{2n+1}\{P_{n+1}(x) - P_{n-1}(x)\}_0^1$$

وحيث نعلم أن $P_n(1) = 1$ فإن

$$\therefore \int_0^1 P_n(x)dx = \frac{1}{2n+1}\left[P_{n-1}(0) - P_{n+1}(0)\right]$$

من الواضح إذا كانت n عدداً زوجياً فإن $\int_0^1 P_n(x)dx = 0$ لكن إذا كانت عدداً فردياً فإن

$$\int_0^1 P_n(x)dx \neq 0$$

مثـال(٤)

إثبت أن

$$\int_{-1}^{1} xP_n(x)P_{n-1}(x)dx = \frac{2n}{4n^2-1}$$

الحل

من العلاقة

$$P_{n+1}(x) = \frac{2n+1}{n+1}xP_n(x) - \frac{n}{n+1}P_{n-1}(x)$$

نجد أن

$$\therefore xP_n(x) = \frac{n+1}{2n+1}P_{n+1}(x) + \frac{n}{2n+1}P_{n-1}(x).$$

بالتعويض فى الدالة المكاملة

$$I = \int_{-1}^{1}\left[\frac{n+1}{2n+1}P_{n+1}(x)P_{n-1}(x) + \frac{n}{2n+1}P^2{}_{n-1}(x)\right]dx$$

ومن خاصية التعامد نرى أن

$$I = \frac{n}{2n+1}\int_{-1}^{1}P_{n-1}^2(x)dx = \frac{n}{(2n+1)}\frac{2}{[2(n-1)+1]} = \frac{2n}{4n^2-1}$$

مثـــال(٥)

أوجد قيمة

$$\int_{-1}^{1} x^2P_n(x)dx$$

الحل

نعلم أن

$$P_2(x) = ½(3x^2-1)$$

أي أن

$$\therefore x^2 = \frac{2}{3}P_2(x) + \frac{1}{3}P_0(x)$$

وعلى ذلك فإن :

$$\therefore I = \int_{-1}^{1}\left[\frac{2}{3}P_2(x) + \frac{1}{3}P_0(x)\right]P_n(x)dx$$

$$= \frac{2}{3}\int_{-1}^{1}P_2(x)P_n(x)dx + \frac{1}{3}\int_{-1}^{1}P_0(x)P_n(x)dx$$

$$= \begin{cases} 0 & n \neq 2, n \neq 0 \\ \frac{1}{3}2 = \frac{2}{3} & , n = 0 \\ \frac{2}{3}.\frac{2}{5} = \frac{4}{15} & n = 2 \end{cases}$$

مثـال(٦)

عبر عن الدالة $F(x) = x^3 + 2x^2 + 3x + 1$ بدلالة كثيرات حدود لجندر

الحل

نعلم أن

$$P_0(x) = 1, P_1(x) = x, P_2(x) = \frac{1}{2}(3x^2 - 1), P_3(x) = \frac{1}{2}(5x^3 - 3x)$$

وعلى ذلك فإن :

$$\therefore x^2 = \frac{2}{3}P_2(x) + \frac{1}{3}P_0(x)$$

وعلى ذلك فإن :

$$x^3 = \frac{2}{5}P_3(x) + \frac{3}{5}P_1(x)$$

$$\therefore F(x) = \frac{2}{5}P_3(x) + \frac{3}{5}P_1(x) + \frac{4}{3}P_2(x) + \frac{2}{3}P_0(x) + 3P_1(x) + P_0(x)$$

$$= \frac{2}{5}P_3(x) + \frac{4}{3}P_2(x) + \frac{18}{5}P_1(x) + \frac{5}{3}P_0(x)$$

نظرية (٢) : - إذا كانت $f(x)$ كثيرة حدود من درجة n فإن

$$f(x)=\sum_{r=0}^{n} c_r P_r(x)$$

حيث

$$c_r=(r+\frac{1}{2})\int_{-1}^{1} f(x)P_r(x)dx$$

مثال (٧)

فك $f(x)=x^2$ فى متسلسلة على الصورة $\sum c_r p_r(x)$

الحل

حيث أن $f(x)=x^2$ كثيرة حدود من درجة 2 ومن متسلسلة ليجندر

$$x^2=\sum_{r=0}^{2} c_r p_r(x)=c_0p_0(x)+c_1p_1(x)+c_2p_2(x) \qquad (1)$$

حيث

$$c_r=(r+\frac{1}{2})\int_{-1}^{1} x^2 p_r(x)dx \qquad (2)$$

ولكن

$$p_0(x)=1,\ p_1(x)=x,\ p_2(x)=\frac{1}{2}(3x^2-1) \qquad (3)$$

بوضع $r=0,1,2$ فى (2) وباستخدام (3) فيكون لدينا

$$c_0=\frac{1}{2}\int_{-1}^{1} x^2dx=\frac{1}{2}\left(\frac{x^3}{3}\right)\Big]_{-1}^{1}={}^{1}\!/_{3}$$

$$c_1=\frac{3}{2}\int_{-1}^{1} x^3dx=0$$

$$c_2=\frac{5}{2}.\frac{1}{2}\int_{-1}^{1} x^2(3x^2-1)dx=\frac{5}{4}\left[3.\frac{x^5}{5}-\frac{x^3}{3}\right]_{-1}^{1}={}^{2}\!/_{3}$$

بالتعويض فى (1) نحصل على

$$x^2 = \frac{1}{2} p_0(x) + \frac{2}{3} p_2(x)$$

مثــال(٨)

فك $x^4 - 3x^2 + x$ فى متسلسلة على الصورة $\sum c_r p_r(x)$

الحل

كما فى المثال السابق نحصل على

$$x^4 - 3x^2 + x = \frac{-4}{5} p_0(x) + p_1(x) - \frac{10}{7} p_2(x) + \frac{8}{35} p_4(x).$$

مثــال(٩)

فك $f(x)$ فى الصورة $\sum_{r=0}^{\infty} c_r p_r(x)$

حيث

$$f(x) = \begin{cases} 0 & , \quad -1 < x < 0 \\ 1 & , \quad 0 < x < 1 \end{cases} \tag{1}$$

الحل

نفترض أن

$$f(x) = \sum_{r=0}^{\infty} c_r P_r(x) \tag{2}$$

حيث

$$c_r = (r + \frac{1}{2}) \int_{-1}^{1} f(x) P_r(x) dx$$

$$= \frac{2r+1}{2} \left[\int_{-1}^{0} f(x) P_r(x) dx + \int_{0}^{1} f(x) P_r(x) dx \right]$$

$$= \frac{2r+1}{2} \int_{0}^{1} P_r(x) dx \tag{3}$$

بوضع $r = 0,1,2,...$ فى (3) نحصل على

$$c_0 = \frac{1}{2}\int_0^1 p_0(x)dx = \frac{1}{2}\int_0^1 1.dx = \frac{1}{2}$$

$$c_1 = \frac{3}{2}\int_0^1 p_1(x)dx = \frac{3}{2}\int_0^1 xdx = \frac{3}{4}$$

$$c_2 = \frac{5}{2}\int_0^1 p_2(x)dx = \frac{5}{2}\int_0^1 \frac{3x^2-1}{2}dx = 0$$

$$c_3 = \frac{7}{2}\int_0^1 p_3(x)dx = \frac{7}{2}\int_0^1 \frac{5x^3-3x}{2}dx = -\frac{7}{16}$$

وهكذا وبتعويض هذه القيم فى (2) نحصل على

$$f(x) = \frac{1}{2}P_0(x) - \frac{3}{4}P_1(x) - \frac{7}{16}P_3(x) + ...$$

تمـارين

١) إذا كان $-1 < x < 1$ و $f(x)=\sum_{k=0}^{\infty} a_k P_k(x)$

فاثبت أن

$$a_k = \frac{2k+1}{2}\int_{-1}^{1} P_k(x) f(x)dx$$

٢) أوجد مفكوك

$$f(x) = \begin{cases} 2x+1 & 0 < x \le 1 \\ 0 & -1 \le x < 0 \end{cases}$$

فى متسلسلة على الصورة

$$\sum_{n=0}^{\infty} a_n P_n(x)$$

وأكتب الحدود الأربعة الأولى غير الصفرية فى هذا المفكوك.

٣) أثبت إن

$$(i)\ \int_{-1}^{1} x\, P_n^2(x) = 0 \qquad (ii)\ \int_{-1}^{1} x^2\, P_4(x)dx = 0$$

$$(iii)\ \int_{-1}^{1} x\, P_n(x)\, dx = \frac{2(n+1)}{(2n+1)(2n+3)}$$

٤) أثبت إن

$$\int_{-1}^{1} x^n P_n(x) dx = \frac{\Gamma(1/2)\, \Gamma(n+1)}{2^n\, \Gamma(n+\frac{3}{2})}$$

٥) برهن خاصيته التعامد

$$= \int_{-1}^{1} P_m(x) P_n(x)\, dx \begin{cases} 0 & m = n \\ \dfrac{2}{2n+1} & m \neq n \end{cases}$$

وذلك باستخدام أن كل من $P_m(x)$, $P_n(x)$ حل لمعادلة لجندر التفاضلية .

الباب السادس

معادلة بسل التفاضلية

Bessel's Differential Equations

الباب السادس

معادلة بسـل التفاضلية

Bessel's Differential Equations

١ - مقدمه

تكون معادلة بسل التفاضلية التفاضلية على الصورة

$$x^2 y'' + xy' + (x^2 - n^2)y = 0$$

حيث n مقدار ثابت.

ولإيجاد حل المعادلة فى صورة متسلسلة لانهائية حيث $x = 0$ نقطة شاذة وأن

$$\lim_{x \to 0} \frac{x\, x}{x^2} = 1 \ , \quad \lim_{x \to 0} \frac{(x^2 - n^2)}{x^2} x^2 = -n^2$$

$\therefore$ $x = 0$ نقطة شاذة منتظمة لذلك نستخدم طريقة فروبنيوس .

نفترض أن الحل على الصورة

$$y = \sum_{n=0}^{\infty} a_k x^{k+r}$$

بالتعويض فى المعادلة التفاضلية المعطاه نحصل على

$$\sum a_k (k+r)(k+r-1)x^{k+r} + \sum a_k (k+r)x^{k+r} + \sum a_k x^{k+r+2} - \sum a_k n^2 x^{k+r} = 0$$

بمساواة معامل x^{k+r} بالصفر فنجد أن

$$\therefore a_k (k+r)(k+r-1) + a_k (k+r) + a_{k-2} - n^2 a_k = 0$$

$$a_k [(k+r)^2 - n^2] = -a_{k-2} \qquad (1)$$

بوضع $k = 0$ فى (1) فإن المعادلة الدليلية فنحصل على

$$r^2 - n^2 = 0 \ , \quad a_{-2} = 0 , \ a_0 \neq 0 \ ;$$

$$\therefore \ r = n \ , \ -n \ .$$

أى أن الجذرين حقيقيان و الفرق بينهما $2n$.

حيث أن الفرق بين الجذرين عدداً كسرياً أو عدداً صحيحاً موجباً. ويساوي $2n$

من (1) نرى أن

$$a_k = \frac{-1}{(k+r)^2 - n^2} a_{k-2} \quad , \quad k \geq 2$$

من هذه العلاقة نحصل على

$$a_1 = a_3 = a_5 = \ldots = 0$$

$$\therefore a_2 = \frac{-1}{(r+2)^2 - n^2} a_0$$

$$a_4 = \frac{-1}{(r+4)^2 - n^2} a_2 = \frac{(-1)^2}{[(r+4)^2 - n^2][(r+2)^2 - n^2]} a_0 \quad , \ldots$$

ويكون الحل هو

$$\therefore y = \sum_{k=0}^{\infty} a_k x^{k+r}$$

فنحصل على

$$= a_0 x^r [1 - \frac{1}{(r+2)^2 - n^2} x^2 + \frac{(-1)^2}{[(r+4)^2 - n^2][(r+2)^2 - n^2]} x^4 + \ldots]$$

بوضع $r = n$

أي أن

$$\therefore \ y = a_0 x^n [1 - \frac{1}{2^2 (n+1)} x^2 + \frac{(-1)^2}{2^4 (n+2)(n+1) 2!} x^4 + \ldots +$$

$$\frac{(-1)^k}{2^{2k} (n+k)(n+k-1) \ldots (n+2)(n+1) k!} x^{2k} + \ldots]$$

$$= a_0 x^n \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^r}{(n+k)(n+k-1) \ldots (n+2)(n+1) k!} (\frac{x}{2})^{2k}$$

باختيار

$$a_0 = \frac{1}{2^n \Gamma(n+1)}$$

ويكون الحل على الصورة $J_n(x)$ ، حيث

$$J_n(x) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k}{\Gamma(n+k+1).k!}(\frac{x}{2})^{n+2k}$$

وتسمى دالة بسل من النوع الأول،

وإذا وضعنا $r=-n$ نحصل على الحل

$$J_{-n}(x) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k}{\Gamma(-n+k+1).k!}(\frac{x}{2})^{-n+2k}$$

ويكون الحل العام

$$y = AJ_n(x) + BJ_{-n}(x)$$

حيث n عدد غير صحيح ، A,B ثابتان اختياريان

مثال (١)

إذا كان n عدداً صحيحاً موجب، فأثبت أن

$$J_{-n}(x) = (-1)^n J_n(x)$$

الحل

نعلم من التعريف أن

$$J_{-n}(x) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k}{\Gamma(-n+k+1).k!}(\frac{x}{2})^{-n+2k}$$

بوضع $-n+k=r$ أي $k=n+r$ فنحصل على

$$J_{-n}(x)=\sum_{r=-n}^{\infty}\frac{(-1)^{n+r}}{\Gamma(r+1).(n+r)!}(\frac{x}{2})^{-n+2n+2r}$$

$$=\sum_{r=-n}^{\infty}\frac{(-1)^{n+r}}{\Gamma(n+r+1).\Gamma(r+1)}(\frac{x}{2})^{n+2r}$$

$$\Gamma(-n+1)=\infty\ ,\ -n+1\le 0\Rightarrow\Gamma(r+1)=\infty,\ -n\le r\le -1$$

$$\therefore J_{-n}(x)=(-1)^n\sum_{r=0}^{\infty}\frac{(-1)^{r}}{\Gamma(n+r+1).r!}(\frac{x}{2})^{n+2r}=(-1)^n J_n(x).$$

مثال (٢)

إذا علم أن

$$\sin(x)=x-\frac{x^3}{3!}+\frac{x^5}{5!}-...=\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n\frac{x^{2n+1}}{(2n+1)!}$$

$$\cos(x)=1-\frac{x^2}{2!}+\frac{x^4}{4!}-...=\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n\frac{x^{2n}}{(2n)!}$$

فأثبت أن

$$J_{\frac{1}{2}}(x)=\sqrt{\frac{2}{\pi x}}\sin(x)\qquad,\qquad J_{\frac{-1}{2}}(x)=\sqrt{\frac{2}{\pi x}}\cos(x)$$

الحل

حيث أن

$$J_n(x)=\sum\frac{(-1)^k}{k!\,\Gamma(n+k+1)}(\frac{x}{2})^{n+2k}$$

فإن

$$J_{\frac{1}{2}}(x)=\sum\frac{(-1)^k}{k!\,\Gamma(k+3/2)}(\frac{x}{2})^{\frac{1}{2}+2k}$$

$$=\sqrt{\frac{2}{x}}\sum\frac{(-1)^k}{k!(k+\frac{1}{2})(k-\frac{1}{2})...\frac{3}{2}.\frac{1}{2}\Gamma(\frac{1}{2})}(\frac{x}{2})^{2k+1}\ ,\quad \Gamma(\frac{1}{2})=\sqrt{\pi}$$

$$= \sqrt{\frac{2}{\pi x}} \sum \frac{(-1)^k 2^{k+1}}{k!(2k+1)(2k-1)\ldots 3.1} \left(\frac{x}{2}\right)^{2k+1}$$

$$= \sqrt{\frac{2}{\pi x}} \sum \frac{(-1)^k 2^{k+1}(2k)(2k-2)\ldots 4.2}{k!(2k+1)!} \left(\frac{x}{2}\right)^{2k+1}$$

$$= \sqrt{\frac{2}{\pi x}} \sum \frac{(-1)^k 2^{2k+1} k!}{k!(2k+1)!} \left(\frac{x}{2}\right)^{2k+1}$$

$$\therefore \quad J_{\frac{1}{2}}(x) = \sqrt{\frac{2}{\pi x}} \sum_{k=0}^{\infty} (-1)^k \frac{x^{2k+1}}{(2k+1)!} = \sqrt{\frac{2}{\pi x}} \sin(x).$$

وبالمثل $-\frac{1}{2} + 2k$

$$J_{\frac{-1}{2}}(x) = \sum \frac{(-1)^k}{k!\,\Gamma(\frac{-1}{2}+k+1)} \left(\frac{x}{2}\right)$$

$$= \sqrt{\frac{2}{x}} \sum \frac{(-1)^k}{k!(k-1/2)(k-3/2)\ldots 3/2.1/2.\Gamma(1/2)} \left(\frac{x}{2}\right)^{2k}$$

$$= \sqrt{\frac{2}{\pi x}} \sum \frac{(-1)^k 2^2}{k!(2k-1)(2k-3)\ldots 3.1} \left(\frac{x}{2}\right)^{2k}$$

$$= \sqrt{\frac{2}{\pi x}} \sum \frac{(-1)^k 2^k (2k)(2k-2)\ldots 4.2}{k!(2k)!} \left(\frac{x}{2}\right)^{2k}$$

$$= \sqrt{\frac{2}{\pi x}} \sum \frac{(-1)^k 2^{2k} k!}{k!(2k)!} \left(\frac{x}{2}\right)^{2k}$$

$$= \sqrt{\frac{2}{\pi x}} \cos(x)$$

مثال (٣)

أثبت أن

$$J_{\frac{1}{2}}^{2}(x)+J_{\frac{-1}{2}}^{2}(x)=\frac{2}{\pi x}$$

الحل

بإستخدام المثال السابق نجد أن

$$J_{\frac{1}{2}}^{2}(x)+J_{\frac{-1}{2}}^{2}(x)=\frac{2}{\pi x}\sin^{2}(x)+\frac{2}{\pi x}\cos^{2}(x)=\frac{2}{\pi x}(\sin^{2}(x)+\cos^{2}(x))=\frac{2}{\pi x}.$$

٢ - الدالة المولدة لدوال بسل Generating Function for $J_n(x)$

تسمى الدالة

$$e^{\frac{x}{2}(t-\frac{1}{t})}=\sum_{n=-\infty}^{\infty}J_n(x)t^n$$

بالدلة المولدة لدوال بسل، حيث n عدد صحيح، ونستطيع استنتاج بعض العلاقات التكرارية لدوال بسل كما يلى :

٣ - العلاقات التكرارية لدوال بسل Recurrence Relations for $J_n(x)$

1) $J_{n+1}(x)=\dfrac{2n}{x}J_n(x)-J_{n-1}(x)$

2) $J_n'(x)=\dfrac{1}{2}[J_{n-1}(x)-J_{n+1}(x)]$

3) $\dfrac{d}{dx}[x^nJ_n(x)]=x^nJ_{n-1}(n)$

4) $\dfrac{d}{dx}[x^{-n}J_n(x)]=-x^{-n}J_{n+1}(x)$

الإثبات:

١) بتفاضل طرفى الدالة المولدة بالنسبة إلى t

$$\frac{x}{2}(1+\frac{1}{t^2})e^{\frac{x}{2}(t-\frac{1}{t})} = \sum_{n=-\infty}^{\infty} nJ_n(x)t^{n-1}$$

$$\frac{x}{2}(1+\frac{1}{t^2})\sum_{n=-\infty}^{\infty} J_n(x)t^n = \sum_{n=-\infty}^{\infty} nJ_n(x)t^{n-1}$$

بمساواة معامل t^{n-1} فى الطرفين نحصل على

$$\therefore \frac{x}{2}J_{n-1}(x)+\frac{x}{2}J_{n+1}(x) = nJ_n(x)$$

$$\therefore J_{n+1}(x) = \frac{2n}{x}J_n(x)-J_{n-1}(x) \qquad \text{i}$$

٢) بتفاضل طرفى الدالة المولدة بالنسبة إلى x فنجد أن

$$\therefore \frac{1}{2}(t-\frac{1}{t})e^{\frac{x}{2}(t-\frac{1}{t})} = \sum J_n'(x)t^n$$

$$\therefore \frac{1}{2}(t-\frac{1}{t})\sum J_n(x)t^n = \sum J_n'(x)t^n$$

بمساواة معامل t^n فى الطرفين فنحصل على

$$J_n'(x) = \frac{1}{2}[J_{n-1}(x)-J_{n+1}(x)] \qquad \text{ii}$$

٣) من العلاقة (ii) ، فإن

$$J_{n+1}(x) = J_{n-1}(x)-2J_n'(x) \qquad \text{(I)}$$

بطرح (I) من العلاقة (i) نجد أن فنحصل على

$$\therefore 0 = \frac{2n}{x}J_n(x)-2J_{n-1}(x)+2J_n'(x)$$

$$\therefore nJ_n(x)+xJ_n'(x) = xJ_{n-1}(x)$$

بضرب طرفى المعادلة فى x^{n-1} فنجد أن

$$\therefore nx^{n-1}J_n(x)+x^nJ_n'(x)=x^nJ_{n-1}(x)$$

أى أن

$$\frac{d}{dx}[x^nJ_n(x)]=x^nJ_{n-1}(x). \qquad \text{iii}$$

٤) بجمع العلاقتين (I) و (i) فنحصل على

$$\therefore 2J_{n+1}(x)=\frac{2n}{x}J_n(x)-2J'_n(x)$$

$$\therefore xJ_n'(x)-nJ_n(x)=-xJ_{n+1}(x)$$

بضرب طرفى المعادلة فى x^{-n-1} فنحصل على

$$\therefore x^{-n}J_n'(x)-nx^{-n-1}J_n(x)=-x^{-n}J_{n+1}(x)$$

$$\therefore \frac{d}{dx}[x^{-n}J_n(x)]=-x^{-n}J_{n+1}(x).$$

<u>ملحوظة:</u> يمكن إثبات العلاقتين (iii) ، (iv) دون إستخدام العلاقتين (i) ، (ii).

حيث أن

$$J_n(x)=\sum_{k=0}^{\infty}\frac{(-1)^k}{k!\,\Gamma(n+k+1)}\left(\frac{x}{2}\right)^{n+2k}$$

فإن

$$\frac{d}{dx}[x^nJ_n(x)]=\frac{d}{dx}\sum_{k=0}^{\infty}\frac{(-1)^k}{k!\,\Gamma(n+k+1)}\left(\frac{1}{2}\right)^{n+2k}x^{2n+2k}$$

$$=\sum_{k=0}^{\infty}\frac{(-1)^k(2n+2k)}{k!\,\Gamma(n+k+1)}\left(\frac{x}{2}\right)^{n+2k-1}\left(\frac{x^n}{2}\right)$$

وحيث أن

ولكن $\Gamma(n+k+1)=(n+k)\Gamma(n+k)=(n+k)\Gamma(n-1+k+1)$

فإن

$$\therefore \frac{d}{dx}[x^nJ_n(x)]=x^n\sum_{k=0}^{\infty}\frac{(-1)^k}{k!\,\Gamma(n-1+k+1)}\left(\frac{x}{2}\right)^{n-1+2k}$$

$$=x^nJ_{n-1}(x).$$

كذلك بالمثل نجد أن

$$\frac{d}{dx}[x^{-n}J_n(x)]=\frac{d}{dx}\sum_{k=0}^{\infty}\frac{(-1)^k}{k!\Gamma(n+k+1)}(\frac{1}{2})^{n+2k}x^{2k}$$
$$=\sum_{k=0}^{\infty}\frac{(-1)^k 2k}{k!\Gamma(n+k+1)}(\frac{1}{2})^{n+2k}x^{2k-1}$$

$$\therefore \frac{d}{dx}[x^{-n}J_n(x)]=x^{-n}\sum_{k=0}^{\infty}\frac{(-1)^k}{(k-1)!\Gamma(n+k+1)}(\frac{x}{2})^{n-1+2k}$$

بوضع $k-1=r$ أي $k=r+1$ فنحصل على

$$\frac{d}{dx}[x^{-n}J_n(x)]=x^{-n}\sum_{r=0}^{\infty}\frac{(-1)^r}{r!\Gamma(n+1+r+1)}(\frac{x}{2})^{n+1+2r}$$
$$=-x^{-n}J_{n+1}(x)$$

أمثله :

مثال (١)

أثبت أن

$$1)\ J_{\frac{3}{2}}(x)=\sqrt{\frac{2}{\pi x}}(\frac{\sin x-x\cos x}{x})$$

$$2)\ J_{-\frac{3}{2}}(x)=-\sqrt{\frac{2}{\pi x}}(\frac{x\sin x+\cos x}{x})$$

الحل

من العلاقة (1)

$$J_{n+1}(x)=\frac{2n}{x}J_n(x)-J_{n-1}(x)$$

بوضع $n=\frac{1}{2}$ فنحصل على

ولدينا من المثال (٢)

$$J_{3/2}(x)=\frac{1}{x}J_{1/2}(x)-J_{-1/2}(x)$$

$$\because J_{1/2}(x)=\sqrt{\frac{2}{\pi x}}\sin x \quad , \quad J_{-1/2}(x)=\sqrt{\frac{2}{\pi x}}\cos x$$

فإن

$$\therefore J_{3/2}(x)=\frac{1}{x}\sqrt{\frac{2}{\pi x}}\sin x-\sqrt{\frac{2}{\pi x}}\cos x$$

$$=\sqrt{\frac{2}{\pi x}}\left(\frac{\sin x-x\cos x}{x}\right)$$

بوضع $n=-\frac{1}{2}$ فى العلاقة (1) فنحصل على

$$J_{1/2}(x)=-\frac{1}{x}J_{-1/2}(x)-J_{-2/3}(x).$$

$$J_{-3/2}(x)=-\frac{1}{x}\sqrt{\frac{2}{\pi x}}\cos x-\sqrt{\frac{2}{\pi x}}\sin x$$

$$=\sqrt{\frac{2}{\pi x}}\left(\frac{\cos x+x\sin x}{x}\right)$$

مثال (٢)

أثبت أن

1) $\int x^n J_{n-1}(x)dx=x^n J_n(x)+C$

2) $\int x^{-n} J_{n+1}(x)dx=-x^{-n} J_n(x)+C$

<u>الأثبات:</u> من العلاقة (3)

$$\frac{d}{dx}[x^n J_n(x)]=x^n J_{n-1}(x)$$

بالتكامل

$$\int x^{n} J_{n-1}(x)dx = x^{n} J_{n}(x) + C$$

كما أن من العلاقة (4)

$$\frac{d}{dx}[x^{-n} J_{n}(x)] = -x^{n} J_{n+1}(x)$$

بالتكامل

$$\int x^{-n} J_{n+1}(x)dx = -x^{-n} J_{n}(x) + C$$

مثال (٣)

أوجد قيمة

$$\int x^{4} J_{1}(x)dx$$

الحل

$$\int x^{4} J_{1}(x)dx = \int x^{2}(x^{2} J_{1}(x)dx)$$

بالتكامل بالتجزئ

$$\begin{aligned}
&u = x^{2} \qquad dv = x^{2} J_{1}(x)dx \\
&du = 2xdx \qquad v = x^{2} J_{2}(x). \\
&\therefore I = x^{4} J_{2}(x) - 2\int x^{3} J_{2}(x)dx \\
&\quad = x^{4} J_{2}(x) - 2x^{3} J_{3}(x) + C.
\end{aligned}$$

مثال (٤)

أثبت أن

$$(i)\ J_0{}' = -J_1 \qquad , \qquad (ii)\ J_2 - J_0 = 2J_0{}''$$

الأثبات

(i) من العلاقة التكرارية

$$xJ'_n = -nJ_n - xJ_{n+1}$$

بوضع $n=0$ نحصل على

$$xJ_0' = -xJ_1 \quad \Rightarrow \quad J_0' = -J_1 \qquad (2)$$

(ii) من العلاقة التكرارية

$$2J_n' = J_{n-1} - J_{n+1}$$

بالتفاضل نحصل على

$$2J_n'' = J_{n-1}' - J_{n+1}' \qquad (3)$$

بوضع $n+1, n-1$ بدلاًمن n نحصل على

$$2J_{n-1}' = J_{n-2} - J_n \qquad (4)$$

$$2J_{n+1} = J_n - J_{n+2} \qquad (5)$$

بالتعويض من (4) ، (5) فى (3) نحصل على

$$2J_n'' = \frac{1}{2}(J_{n-2} - J_n) - \frac{1}{2}(J_n - J_{n+2})$$

$$4J_n'' = J_{n-2} - 2J_n + J_{n+2} \qquad (6)$$

بوضع $n=0$ فى (6) نحصل على

$$4J_0'' = J_{-2} - 2J_0 + J_2$$

$$= (-1)^2 J_n - 2J_0 + J_2$$

$$4J_0'' = 2(J_2 - J_0) \quad \Rightarrow \quad 2J_0'' = J_2 - J_0$$

مثال(٥)

أستخدم العلاقة التكرارية

$$J_{n+1} = \frac{2n}{x} J_n - J_{n-1}$$

فى التعبير عن J_4 بدلالة J_1, J_0.

الحل

حيث أن

$$J_{n+1}=\frac{2n}{x}J_n-J_{n-1}$$

بوضع $n=3$ نحصل على

$$J_4=\frac{6}{x}J_3-J_2$$

بوضع $n=2$ نحصل على

$$J_3=\frac{4}{x}J_2-J_1$$

$$\therefore J_4=\frac{6}{x}[\frac{4}{x}J_2-J_1]-J_2$$

$$=(\frac{24}{8^2}-1)J_2-\frac{6}{x}J_1$$

بوضع $n=1$ نحصل على

$$J_2=\frac{2}{x}J_1-J_0$$

$$\therefore J_4=(\frac{24}{x^2}-1)(\frac{2}{x}J_1-J_0)-\frac{6}{x}J_1$$

$$=(\frac{48}{x^2}-\frac{8}{x})J_1-(\frac{24}{x^2}-1)J_0$$

مثال (٦)

بإستخدام

$$(i)\ \frac{d}{dx}(x^nJ_n)=x^nJ_{n-1}$$

$$(ii)\ \frac{d}{dx}(x^{-n}J_n)=-x^{-n}J_{n+1}$$

أثبت أن

$$\frac{d}{dx}(J_n^{\ 2}+J_{n+1}^{\ 2})=2(\frac{n}{x}J_n^{\ 2}-\frac{n+1}{x}J_{n+1}^{\ 2})$$

الحل

من (i) ; (ii) نحصل على

$$J_n'=\frac{-n}{x}J_n+J_{n-1} \qquad (1)$$

$$J_n'=\frac{n}{x}J_n-J_{n+1} \qquad (2)$$

بوضع $n+1$ بدلاً من n فى (1) نحصل على

$$J_{n+1}'=\frac{-(n+1)}{x}J_{n+1}+J_n \qquad (3)$$

$$\therefore \frac{d}{dx}[J_n^{\ 2}+J_{n+1}^{\ 2}]=2J_nJ_n'+2J_{n+1}J_{n+1}'$$

$$=2J_n[\frac{n}{x}J_n-J_{n+1}]+2J_{n+1}[-\frac{n+1}{x}J_{n+1}+J_n]$$

$$=2(\frac{n}{x}J_n^{\ 2}-\frac{n+1}{x}J_{n+1}^{\ 2})$$

مثال (٧)

بإستخدام المعطيات (ii) , (i) فى المثال السابق أثبت أن

$$\frac{d}{dx}[xJ_nJ_{n-1}]=x\,[J_n^{\ 2}-J^2{}_{n+1}]$$

الحل

$$\frac{d}{dx}[xJ_nJ_{n+1}]=J_nJ_{n+1}+x(J_n'J_{n+1}+J_nJ_{n+1}')$$

$$=J_nJ_{n+1}+J_{n+1}(xJ_n')+J_0(xJ_{n+1}') \qquad (1)$$

ومن العلاقتين (ii) , (i) نجد أن

$$xJ_n' = nJ_n - xJ_{n+1} \qquad (2)$$

$$xJ_n' = -nJ_n + xJ_{n-1} \qquad (3)$$

بوضع $n+1$ بدلاً من n فى (3) نحصل على

$$xJ_{n+1}' = -(n+1)J_{n+1} + xJ_n \qquad (4)$$

باستخدام xJ_{n+1}', xJ_n' من (2) ، (4) فى (1) نحصل على

$$\frac{d}{dx}[xJ_nJ_{n+1}] = J_nJ_{n+1} + J_{n+1}(nJ_n - xJ_{n+1}) + J_n(-(n+1)J_{n+1} + xJ_n)$$

$$= x[J_n^2 - J_{n+1}^2].$$

مثال(٨)

إذا كان $n > -1$ أثبت أن

$$\int_0^x x^{n+1}J_n(x)dx = x^{n+1}J_{n+1}(x)$$

الحل

$$\frac{d}{dx}(x^nJ_n(x)) = x^nJ_{n-1}(x) \qquad (1)$$

حيث أن

بوضع $n+1$ بدلاً من n فى (1) نحصل على

$$\frac{d}{dx}(x^{n+1}J_{n+1}) = x^{n+1}J_n(x) \qquad (2)$$

بالتكامل من صفر إلى x نحصل على

$$\int x^{n+1} J_n(x)\,dx = x^{n+1} J_{n+1}(x)$$

مثال(٩)

أثبت أن

$$(i)\ \frac{d}{dx}(xJ_1(x)) = xJ_0(x)$$

$$(ii)\ \int_0^b xJ_0(ax)\,dx = \frac{b}{a}J_1(ab)$$

الحل :

حيث أن

$$\frac{d}{dx}(x^n J_n(x)) = x^n J_{n-1}(x) \qquad (1)$$

بوضع $n=1$ نحصل على

$$\frac{d}{dx}(xJ_1) = xJ_0$$

بوضع $ax=t$ أي $adx=dt$ فنجد أن

$$\int_a^b xJ_0(ax)\,dx = \frac{1}{a^2}\int_a^{ab} tJ_0(t)\,dt$$

وبإستخدام الجزء (1) نحصل على

$$\int_a^b xJ_0(ax)\,dx = \frac{1}{a^2}\int_0^{ab}\frac{d}{dt}(tJ_1)\,dt = \frac{1}{a^2}[tJ_1]_0^{ab} = \frac{1}{a^2}(abJ_1(ab)-0)$$

$$\therefore \int_0^b xJ_0(ax)\,dx = \frac{b}{a}J_1(ab)$$

وحيث $J_1(0)=0$

مثال(١٠)

أثبت أن

$$(i)\ \frac{d}{dx}(J_0(x))=-J_1(x)$$

$$(ii)\ \int_a^b J_0J_1dx=\frac{1}{2}[J_0^{\,2}(a)-J_0^{\,2}(b)]$$

الحل

الجزء (i) : حيث أن

$$\frac{d}{dx}(x^{-n}J_n(x))=-x^{n}J_{n+1}(x) \qquad (1)$$

بوضع $n=0$

$$\frac{d}{dx}(J_0(x))=-J_1(x) \qquad (2)$$

الجزء (ii) باستخدام مثال (٧) نحصل على

$$\int_a^b J_0(x)J_1(x)dx=-\int_a^b J_0(x)J_0'(x)dx=[\frac{J_0^{\,2}(x)}{2}]_a^b=\frac{1}{2}[J_0^{\,2}(b)-J_0^{\,2}(a)]$$

مثال(١١) :

عبر عن $\int J_3(x)dx$ بدلالة $J_1(x),J_2(x)$.

الحل

بإسخدام العلاقة

$$\frac{d}{dx}(x^{-n}J_n(x))=-x^{-n}J_{n+1}$$

بالتكامل نحصل على

$$\int x^{-n}J_{n+1}(x)\,dx = -x^{n}J_n(x) \qquad (1)$$

$$\int J_3(x)\,dx = \int x^{2}(x^{-2}J_3(x))\,dx = x^{2}(-x^{-2}J_2(x)) - \int 2x(-x^{2}J_2(x))\,dx$$

بالتكامل بالتجزئ و بإستخدام (1) ، $n = 2$ نحصل على

$$\int J_3(x)dx = -J_2(x) + \int x^{-1}J_2(x)dx = -J_2(x) + 2(-x^{-1}J_1(x)) + C$$

ومن العلاقة التكرارية

$$\frac{2n}{x}J_n(x) = J_{n-1}(x) + J_{n+1}(x) \qquad (3)$$

بوضع $n = 1$ نحصل على

$$\frac{2}{x}J_1(x) = J_0(x) + J_2(x)$$

$$J_2(x) = \frac{2J_1(x)}{x} - J_0(x) \qquad (4)$$

بإستخدام (4) فى (2) فنجد أن

$$\int J_3(x)dx = -\left(\frac{2J_1(x)}{x} - J_0(x)\right) - 2\frac{J_1(x)}{x} + C$$
$$= J_0(x) - \frac{4J_1(x)}{x} + C$$

حيث C ثابت إختيارى.

مثال(١٢) :

أثبت أن

$a)$ $\cos(x\sin\theta) = J_0(x) + 2J_2(x)\cos 2\theta + 2J_4(x)\cos 4\theta + \dots$

$b)$ $\sin(x\sin\theta) = 2J_1(x)\sin\theta + 2J_3(x)\sin 3\theta + 2J_5(x)\sin 5\theta + \dots$

الحل

نفرض أن $t = e^{i\theta}$ وبالتعويض فى الدالة المولدة نحصل على

$$e^{\frac{1}{2}x(e^{i\theta}-e^{-i\theta})}=e^{ix\sin\theta}=\sum_{n=-\infty}^{\infty}J_n(x)e^{in\theta}=\sum_{n=-\infty}^{\infty}J_n(\cos n\theta+\sin n\theta)$$

$$\cos(x\sin\theta)+i\sin(x\sin\theta)=\{J_0(x)+[J_{-1}(x)+J_1(x)]\cos\theta+[J_{-2}(x)+J_2(x)]\cos2\theta+\ldots\}$$
$$+i\{(J_1(x)-J_{-1}(x))\sin\theta+(J_2(x)-J_{-2}(x))\sin2\theta+\ldots\}$$

وحيث أن $J_{-n}(x)=(-1)^n J_n(x)$ فنحصل على

$$\cos(x\sin\theta)+i\sin(x\sin\theta)=\{J_0(x)+2J_2(x)\cos2\theta++\ldots\}$$
$$+i\{2J_1(x)\sin\theta+2J_3(x)\sin3\theta+\ldots\}$$

وبمساواة الجزء الحقيقى والجزء التخيلى ينتج المطلوب.

تمــارين

١) أوجد قيمة كل من

$i)\ J_{5/2}(x) \qquad ii)\ J_{-5/2}(x)$

بدلالة دالتى الجيب وجيب التمام.

٢)أوجد قيمة $J_3(x)$ بدلالة $J_0(x), J_1(x)$.

٣) أثبت أن

$$i)\ J_n''(x) = \frac{1}{4}[J_{n-2}(x) - J_n(x) + J_{n+2}(x)]$$

$$ii)\ J_n'''(x) = \frac{1}{8}[J_{n-3}(x) - 3J_{n-1}(x) + 3J_{n+1}(x) - J_{n+3}(x)]$$

بإستخدام العلاقات التكرارية، ثم عمم تلك النتائج.

٤) أوجد قيمة كلاً من

$$i)\ \int x^3 J_2(x)dx\ ,$$

$$ii)\ \int_0^1 x^3 J_0(x)dx\ ,$$

$$iii)\ \int x^2 J_0(x)dx.$$

٥) أثبت أن

$$i)\ J_0'(x) = -J_1(x)\ ,$$

$$ii)\ \frac{d}{dx}[xJ_1(x)] = xJ_0(x).$$

٦) بإستخدام العلاقة

$$e^{\frac{x}{2}(t-\frac{1}{t})} = \sum_{n=-\infty}^{\infty} J_n(x)t^n$$

أثبت أن

$i) 1 = J_0(x) + 2J_2(x) + 2J_4(x) + \dots$

$ii) J_1(x) - J_3(x) + J_5(x) - J_7(x) + \dots = \sin x$

٧) أثبت أن

$$x = 2 J_0 J_1 + 6 J_1 J_2 + \dots + 2(2n+1) J_n J_{n+1} + \dots\dots$$

[تنويه : استخدام المثال (١٠)]

٨) أثبت أن

$(i)\ J_0^1 = J_1$

$(ii)\ J_2 - J_0 = 2 J_0''$

$(iii)\ J_2 = J_0' - \left(\frac{1}{x}\right) J_0$

$(iv)\ J_2 + 3J_0' + 4 J_0''' = \infty$

٩) عبر عن $J_4(x)$ بدلالة J_0 , J_1

١٠) أثبت أن

$$\int_0^x t \cdot J_n^2(t)\, dt = \frac{1}{2} x^2 \left[J_n^2(x) - J_{n-1}(x) J_{n+1}(x) \right]$$

مستخدماً العلاقات التكرارية

الباب السابع

المعادلات التفاضلية الجزئية

Partial Differential Equations

الباب السابع
المعادلات التفاضلية الجزئية
Partial Differential Equations

١ – مقدمه :

المعادلة التفاضلية الجزئية هـى معادلـة تفاضلية تحوى مشتقه جزئيه أو أكثر وهـى بذلك تتضـمن علـى متغير تـابع واحـد وأكثـر مـن متغير مستقل ومشتقات المتغير التابع بالنسبة للمتغيرات المستقلة أى إنها على الصورة

$$f(x, y, z, z_x, z_y, z_{xy}, z_{xx}, z_{yy}, \ldots) = 0$$

حيث z هنا المتغير التابع ، x, y متغيران مستقلان ، ونلاحظ هنا أن

$$z_x = \frac{\partial z}{\partial x}, z_y = \frac{\partial z}{\partial y}, z_{xy} = \frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y}, \ z_{xx} = \frac{\partial^2 z}{\partial x^2}, \ z_{yy} = \frac{\partial^2 z}{\partial y^2}$$

ونود ان نلفت الانتباه اننا سوف نستخدم الرموز الآتية في دراستنا

$$z_x = p, z_y = q, z_{xx} = r, z_{xy} = s, z_{yy} = t.$$

ومن أمثلة المعادلات التفاضلية الجزئية:

$$z_{xy} + 2z_x + 3z_y + 5z = 2x + \cos(x - y)$$

$$z_x + 3z_y = 5z + \tan(3x - 2y)$$

$$z_{xx} + z_{yy} = x^2 y^2$$

٢ - أنواع المعادلات التفاضلية الجزئية

يمكن تصنيف المعادلات التفاضلية الجزئية إلى تصنيفات مختلفة ، وهذا التصنيف له مفهوم هام لأن النظرية العامة وطرق الحل تطبق فقط على كل معادلة مصنفة والتصنيفات الأساسية هي :

١) رتبة المعادلة التفاضلية (Order) :

رتبة المعادلة التفاضلية هي رتبة أعلى معامل تفاضلي في المعادلة

أمثلة

$z_t = z_{xx}$ من الرتبة الثانية

$z_t = z_x$ من الرتبة الاولى

$z_t = z_{xxx} + \sin x$ من الرتبة الثالثة

٢) عدد المتغيرات :

هو عدد المتغيرات المستقلة فمثلا

$z_t = z_{xx}$ متغيران هما x,t

$u_t = u_{rr} + \frac{1}{r}u_{\theta\theta}$ المتغيرات هى r,t,θ

٣) الخطية :

قد تكون المعادلة التفاضلية الجزئية خطية أو غير خطية. ففي المعادلات التفاضلية الخطية يكون المتغير التابع u (مثلا) وكل مشتقاته الجزئية تظهر في الصورة الخطية (أي إنها غير مضروبة في بعضها أو مرفوعة لأس خلاف الواحد الصحيح).

وبإيجاز فإن الصورة العامة للمعادلة التفاضلية الجزئية الخطية من الرتبة الثانية في متغيرين لها الصورة الآتية:

$$Au_{xx} + Bu_{xy} + Cu_{yy} + Du_x + Eu_y + Fu = G \qquad (1)$$

حيث A, B, C, D, E, F, G إما أن تكون ثوابت أو دوال متصلة في المتغيرين x, y

فمثلا

$u_{tt} = e^{-t}u_{xx} + \sin t$ خطية

$uu_{xx} + u_t = 0$ غير خطية

$uu_x + yu_y + u^2 = 0$ غير خطية

$u_{xx} + yu_{yy} = 0$ خطية

٤) التجانس:

تسمى المعادلة التفاضلية الجزئية متجانسة إذا كانت $G(x, y) = 0$ ، وتسمى غير متجانسة إذا كانت $G(x, y) \neq 0$.

٥) أنواع المعاملات:

إذا كانت المعاملات A, B, C, D, E, F, G في المعادلة (1) ثوابت فإن المعادلة (1) تسمى معادلة تفاضلية جزئية خطية ذات معاملات ثابتة وأما إذا كان واحد من المعاملات أو أكثر دالة في x أو y أو كلاهما فإنها تكون ذات معاملات متغيرة.

٦) الأنواع الثلاثة الأساسية للمعادلات الخطية:

المعادلات التفاضلية الخطية التي على الصورة (1) لها ثلاثة أنواع :

أولا: النوع المكافئ Parabolic إذا كانت

$$B^2-4AC=0$$

ثانيا: النوع التزايدي Hyperbolic إذا كانت

$$B^2-4AC>0$$

ثالثا: النوع التناقصي Elliptic إذا كانت

$$B^2-4AC<0$$

ومن أمثلة ذلك

(i) $u_t=u_{xx}$

نجد أن $C=0, A=1 \;,\; B=0$

$$\therefore B^2-4AC=0$$

أي أنها Parabolic

(ii) $u_{tt}=u_{xx}$

نجد أن $B=0 \,,\, A=-C=1$

$$\therefore B^2-4AC=4>0$$

أي أنها Hyperbolic

(iii) $u_{xy}=0$

نجد أن $B=1 \;,\; A=C=0$

$$\therefore B^2-4AC=1>0$$

أي أنها Hyperbolic

(iv) $\alpha u_{xx}+u_{yy}=0$

نجد أن $C=1,\; A=\alpha \;,\; B=0$

$$\therefore B^2-4AC=-4\alpha$$

فتكون من النوع الناقصي إذا كان $\alpha > 0$ ومن النوع المكافئ إذا كان $\alpha = 0$ ومن النوع الزائدي إذا كان $\alpha > 0$

ويجب ملاحظة أنه في حالة المعادلات التفاضلية الجزئية ذات المعاملات المتغيرة فإن نوع المعادلة قد يتغير من نقطة إلى أخرى.

تمرين:

أكتب التصنيف الكامل للمعادلات التفاضلية الجزئية الأتية:

$(i)\ u_t = u_{xx} + 2u_x + u$

$(ii)\ u_{xx} + 3u_{xy} + u_{yy} = \sin x$

$(iii)\ u_t = u_{xx} + e^{-t}$

$(iv)\ u_{tt} = uu_{xxx} + e^{-t}$

الآن: ماذا نعنى بحل المعادلة التفاضلية الجزئية الخطية (1) ؟

نعنى بحل المعادلة التفاضلية الجزئية الخطية (1) هو دالة حقيقية g حيث $z = g(x, y)$ معرفة على المجموعة S للمناطق فى المستوى xy وتحقق المعادلة (1).

مثال (١)

إثبت ان $u = x^2 - y^2$ حل للمعادلة $u_{xx} + u_{yy} = 0$

الحل

$u_x = 2x \quad , \quad u_{xx} = 2 \quad , \quad u_y = -2y \quad , \quad u_{yy} = -2$

وبالتعويض في المعادلة نحصل على

$\therefore u_{xx} + u_{yy} = 2 - 2 = 0$

ونطاق u هو كل المستوى xy.

تمرين: إثبت أن $u = \ln(x^2 + y^2)$ حل للمعادلة $u_{xx} + u_{yy} = 0$

مثال (٢)

حل المعادلة التفاضلية الجزئية الآتية

$$z_x = 2xy$$

حيث $z = f(x, y)$.

الحل

نكامل بالنسبة إلى x (بإعتبار y ثابت) فنحصل على الحل

$z = x^2 y + \phi(y)$ وهو حل المعادلة المعطاه

حيث $\phi(y)$ دالة اختيارية في y (الدالة الاختيارية $\phi(y)$ هنا بدلا من ثابت التكامل لإن $\dfrac{\partial \phi}{\partial x} = 0$).

ملاحظة : حلول المعادلات التفاضلية الجزئية تحتوى على دوال إختيارية بينما حلول المعادلات التفاضلية العادية تحتوى على ثوابت اختيارية .

تمرين:

حل المعادلة $z_{yx} = 0$ حيث $z = f(x, y)$.

نظرية : اذا كان $u_1 = u_1(x, y)$ ، $u_2 = u_2(x, y)$ حلين لمعادلة تفاضلية جزئية خطية متجانسة فى المنطقة R من المستوى xy فإن ى تركيبة خطية على الصورة $u(x, y) = c_1 u_1 + c_2 u_2$ هي حل أيضا لتلك المعادلة حيث c_1 , c_2 ثابتان اختياريان .

٣ - تكوين المعادلة التفاضلية الجزئية

تتكون المعادلة التفاضلية الجزئية إما

(١) بحذف الثوابت الإختيارية أو

(٢) بحذف الدوال الإختيارية

أولاً : حذف الثوابت الإختيارية

مثال (٣)

إحذف الثوابت الإختيارية من المعادلة

$$z = ax + (1-a)y + b$$

الحل

$$z_x = a = p \quad , \quad z_y = 1 - a = q$$

$$\therefore p + q = 1$$

أي أن

$$z_x + z_y = 1$$

مثال (٤)

إحذف الثوابت الإختيارية من المعادلة

$$z = ax^2 + by^2 \quad , \quad ab > 0$$

الحل

$$z_x = 2ax \quad , \quad z_y = 2by$$

$$\therefore z = \frac{z_x}{2x} x^2 + \frac{z_y}{2y} y^2$$

أي أن

$$x z_x + y z_y = 2z$$

مثال (٥)

إحذف الثوابت a,b من المعادلة

$$z = ax^2 + by^2 + ab$$

الحل

$$z_x = 2ax \quad \rightarrow \quad a = \frac{p}{2x}$$

$$z_y = 2by \quad \rightarrow \quad b = \frac{q}{2y}$$

$$\therefore z = \frac{p}{2x}x^2 + \frac{q}{2y}y^2 + \frac{pq}{4xy}$$

$$\therefore 2yx^2p + 2xy^2q = 4xyz$$

أي أن

$$yx^2p + xy^2q = 2xyz$$

مثال (٦)

حذف a من المعادلة

$$z = a(x+y)$$

الحل

$$z_x = a = p \rightarrow z = p(x+y)$$

أو

$$z_y = a = q \rightarrow z = q(x+y).$$

ملاحظة : إذا كان عدد الثوابت الاختيارية المطلوب حذفها يزيد عن عدد المتغيرات المستقلة فإن رتبة المعادلة (أو المعادلات) التفاضلية الجزئية الناتجة أعلى من الرتبة الأولى كما يتضح ذلك من المثال التالي :

مثال (٧)

احذف الثوابت c,b,a من المعادلة

$$z = ax + by + cxy$$

الحل

$$z_x = p = a + cy \ , \quad z_y = q = b + cx$$

ولكن هاتين المعادلتين بالإضافة إلى المعادلة المفروضة غير كافية لحذف الثوابت وبذلك نشتق p بالنسبة إلى x ، فنحصل على معادلة من الرتبة الثانية

$$r = \frac{\partial^2 z}{\partial x^2} = 0$$

ويمكن إشتقاق q بالنسبة إلى y لنحصل على

$$t = \frac{\partial^2 z}{\partial y^2} = 0$$

أيضاً يمكن إشتقاق p بالنسبة إلى y أو q بالنسبة إلى x لنحصل على

$$s = \frac{\partial p}{\partial y} = \frac{\partial q}{\partial x} = c$$

وعليه يكون

$$b = q - xs \quad , \quad a = p - ys$$

وبالتعويض عن a,b,c فى المعادلة المفروضة نجد أن

$$z = (p - sy)x + (q - sx)y + xys$$
$$= xp + yq - xys$$

وعليه يكون قد حصلنا على ثلاث معادلات تفاضلية جزئية وهى

$$r = 0 \ , \ t = 0 \ , \ z = xp + yq - xys$$

وهي معادلات من الرتبة الثانية .

مثال (٨)

احذف b,a من المعادلة

$$z = (x^2 + a)(y^2 + b)$$

الحل

$$z_x = p = 2x(y^2 + b) \ , \ z_y = q = 2y(x^2 + a)$$

أي أن

$$y^2 + b = p/2x \ , \left(x^2 + a^2\right) = q/2y$$

$$\therefore z = \frac{pq}{4x} \quad i.e: \ pq = 4xyz$$

مثال (٩)

أوجد المعادلة التفاضلية لمجموعة كرات نصف قطرها 5 وحدة طول ومركزها في المستوى $x = y$.

الحل

معادلة مجموعة الكرات

$$(x-a)^2+(y-a)^2+(z-b)^2=25$$

حيث a,b ثوابت إختيارية بالإشتقاق جزئياً بالنسبة إلى x ثم بالنسبة إلى y نجد أن

$$x-a+(z-b)p=0 \quad \rightarrow \quad x-a=mp$$

$$y-a+(z-b)q=0 \quad \rightarrow \quad y-a=mq$$

حيث $-m=z-b$

بالتعويض نجد ان

$$m^2(p^2+q^2+1)=25$$

ولكن

$$x-y=m(p-q)$$

وبالتعويض عن m نجد أن

$$(x-y)^2(p^2+q^2+1)=25(p-q)^2$$

مثال(١٠)

برهن أن المعادلة التفاضلية الجزئية الناتجة من حذف الثوابت a,b من المعادلة

$$z=ax+by+f(a,b)$$

هى معادلة كليرو الموسعة.

الحل

$$p=z_x=a \;,\; q=z_y=b$$

وعليه يكون

$$z=px+qy+f(p,q)$$

وهى معادلة كليرو الموسعة.

ثانيا: حذف الدوال الاختيارية

مثال(١١)

إحذف الدالة الإختيارية في المعادلة

$$z = f(x-y)$$

الحل

نضع $x - y = u$ ، أي أن $z = f(u)$ فإن

$$\therefore z_x = \frac{\partial z}{\partial x} = \frac{df}{du}.\frac{\partial u}{\partial x} = \frac{df}{du} = p$$

$$z_y = \frac{\partial z}{\partial y} = \frac{df}{du}.\frac{\partial u}{\partial y} = -\frac{df}{du} = q$$

$$\therefore p + q = 0$$

أو $z_x + z_y = 0$

مثال (١٢)

إذا كانت معادله أي مخروط رأسه (x_0, y_0, z_0) تكون على الصورة

$$f\left(\frac{x - x_0}{z - z_0}, \frac{y - y_0}{z - z_0}\right) = 0$$

فأوجد المعادلة التفاضلية.

الحل

بالإشتقاق جزئياً بالنسبة إلى x ثم بالنسبة إلى y ونضع

$$u = \frac{x - x_0}{z - z_0} \quad , \quad v = \frac{y - y_0}{z - z_0}$$

نجد أن

$$\frac{\partial f}{\partial u}\left[\frac{1}{z - z_0} - p\frac{x - x_0}{(z - z_0)^2}\right] + \frac{\partial f}{\partial v}\left[-p\frac{y - y_0}{(z - z_0)^2}\right] = 0$$

$$\frac{\partial f}{\partial u}\left[-q\frac{x - x_0}{(z - z_0)^2}\right] + \frac{\partial f}{\partial v}\left[\frac{1}{z - z_0} - q\frac{y - y_0}{(z - z_0)^2}\right] = 0$$

بحذف $\frac{\partial f}{\partial u}, \frac{\partial f}{\partial v}$ من المعادلتين نحصل على

$$pq=\frac{(x-x_0)(y-y_0)}{(z-z_0)^4}=[\frac{1}{z-z_0}-\frac{p(x-x_0)}{(z-z_0)^2}][\frac{1}{z-z_0}-\frac{q(y-y_0)}{(z-z_0)^2}]$$

$$\therefore \frac{1}{(z-z_0)^2}-\frac{1}{(z-z_0)}[\frac{p(x-x_0)}{(z-z_0)^2}+\frac{q(y-y_0)}{(z-z_0)^2}]=0$$

أى أن

$$(x-x_0)p+(y-y_0)q=(z-z_0)$$

مثال (١٣)

أوجد المعادلة التفاضلية التي تنشأ عن

$$f\ (x+y+z, x^2+y^2-z^2)=0$$

الحل

نضع $u=x+y+z$, $v=x^2+y^2-z^2$ وعليه فإن $f\ (u,v)=0$

والإشتقاق بالنسبة إلى x ثم بالنسبة إلى y نحصل على

$$\frac{\partial f}{\partial u}(1+p)+\frac{\partial f}{\partial v}(2x-2zp)=0$$

$$\frac{\partial f}{\partial u}(1+q)+\frac{\partial f}{\partial v}(2y-2zq)=0$$

وبحذف $\frac{\partial f}{\partial u},\frac{\partial f}{\partial v}$ نجد أن

$$\begin{vmatrix}1+p & 2x-2zp\\ 1+q & 2y-2zq\end{vmatrix}=0$$

وعليه يكون

$$2(y-x)+2(z+y)p-2(z+x)q=0$$

مثال (١٤)

إحذف الدوال الاختيارية من المعادلة

$$y=f\ (x-ct)+g\ (x+ct)$$

الحل

بالتفاضل مرتين بالنسبة إلى x ، ثم بالنسبة إلى t نجد أن

$$y_{xx} = f''(x-ct) + g''(x+ct)$$

$$y_{tt} = c^2 f''(x-ct) + c^2 g''(x+ct)$$

$$\therefore y_{tt} = c^2 y_{xx}$$

تمارين

إحذف الثوابت الإختيارية من كل من المعادلات الاتيه:

1) $z = (x-a)^2 + (y-b)^2$

2) $z = axy + b$

3) $ax + by + cz = 1$

4) $\dfrac{x^2}{a^2} + \dfrac{y^2}{b^2} + \dfrac{z^2}{c^2} = 1$

5) $z = a\,e^{bt} \sin bx$

6) $z = ax + by + a^2 + b^2$

7) $z = \left(x - a^2\right) + \left(y - b\right)^2$

8) $ax + b = a^2 x + y$

أحذف الدوال الإختيارية من كل من المعادلات الاتية:

1) $f\left(\dfrac{z}{x^2}, x - y\right) = 0$

2) $z = x^2 f(x-y)$

3) $z = f(x+y)$

4) $z = f(x) + e^{y} g(x)$

5) $x = f(z) + g(y)$

6) $z' = f(xy)$

7) $z = f(x+iy) + g(x-iy)$

8) $z = xy + f(x^2 + y^2)$

9) $z = f\left(\dfrac{xy}{z}\right)$

10) $z = e^{ax \times by} f(ax - by)$

11) $lx + my + nz = Q(x^2 + y^2 + z^2)$

12) $f(x^2 + y^2 + z^2, z^2 - 2xy) = 0$

٤ - المعادلات التفاضلية الجزئية الخطية من الرتبة الأولى

سوف نقتصر دراستنا هنا على معادلة تفاضلية خطية من الرتبة الاولى حيث z متغير تابع بينما y,x متغيرين مستقلين وسوف نستخدم

$$p = z_x = \frac{\partial z}{\partial x} \;,\; q = z_y = \frac{\partial z}{\partial y}$$

وتأخذ المعادلة التفاضلية الجزئية (P.D.E) الصورة

$$f(x,y,z,p,q) = 0 \qquad (1)$$

ويوجد نوعان من الدوال تحقق هذه المعادلة وكل منها يحتوى على عدد لا نهائى من الحلول

النوع الاول: حل يحتوى على ثابتين اختياريين يسمى بالحل التام Complete Solution او بالتكامل التام (Complete Integral).

النوع الثانى: حل يحتوى على دالة اختيارية يسمى بالحل العام (General Solution) او بالتكامل التام (Complete Integral).

أولاً : الحل التام

نفترض أن لدينا المعادلة

$$F(x,y,z,A,B) = 0 \qquad (2)$$

بالاشتقاق بالنسبة إلى x ، إلى y على الترتيب نحصل على

$$\frac{\partial F}{\partial x} + \frac{\partial F}{\partial z}.\frac{\partial z}{\partial x} = 0 \quad \rightarrow \quad \frac{\partial F}{\partial x} + \frac{\partial F}{\partial z} p = 0 \qquad (3)$$

$$\frac{\partial F}{\partial y} + \frac{\partial F}{\partial z}.\frac{\partial z}{\partial y} = 0 \quad \rightarrow \quad \frac{\partial F}{\partial y} + \frac{\partial F}{\partial z} q = 0 \qquad (4)$$

بحذف الثابتين A,B من المعادلات (2),(3),(4) نحصل على المعادلة التفاضلية (1) وعليه تكون معادلة (2) تكاملاً تاماً للمعادلة (1).

ثانياً: الحل العام

ليكن

$$u=u(x,y,z) \quad , \quad v=v(x,y,z)$$

بحيث

$$\phi(u,v)=0 \tag{5}$$

حيث ϕ دالةاختيارية، بالإشتقاق بالنسبة إلى x وإلى y على الترتيب نحصل على

$$\frac{\partial\phi}{\partial u}\left[\frac{\partial u}{\partial x}+\frac{\partial u}{\partial z}p\right]+\frac{\partial\phi}{\partial v}\left[\frac{\partial v}{\partial x}+\frac{\partial v}{\partial z}p\right]=0 \tag{6}$$

$$\frac{\partial\phi}{\partial u}\left[\frac{\partial u}{\partial y}+\frac{\partial u}{\partial z}q\right]+\frac{\partial\phi}{\partial v}\left[\frac{\partial v}{\partial y}+\frac{\partial v}{\partial z}q\right]=0 \tag{7}$$

بحذف $\frac{\partial\phi}{\partial v},\frac{\partial\phi}{\partial u}$ من (6),(7) نجد أن

$$(u_x+u_z p)(v_y+v_z q)-(v_v+v_z p)(u_y+u_z q)=0$$

$$\therefore u_x v_y+u_x v_z q+u_z v_y p+u_z v_z pq-u_y v_x-u_z v_x q-u_y v_z p-u_z v_z pq=0$$

$$\therefore (u_y v_z-u_z v_y)p+(u_z v_x-u_x v_z)q=u_x v_y-u_y v_x$$

$$Pp+Qq=R \tag{8}$$

حيث

$$P=u_y v_z-u_z v_y \quad , \quad Q=u_z v_x-u_x v_z \quad , \quad R=u_x v_y-u_y v_x$$

$\therefore$ العلاقة (5) هى حل للمعادلة (8) مهما كانت الدالة ϕ والمعادلة (8) معادلة تفاضلية جزئية خطية من الرتبة الأولى.

الآن اعتبر المنحنى (الناتج من تقاطع سطحين)

$$u = a \quad , \quad v = b$$

حيث b, a ثابتان وبالاشتقاق بالنسبة إلى x إلى y على الترتيب نحصل على

$$u_x dx + u_y dy + u_z dz = 0 \qquad (9)$$

$$v_x dx + v_y dy + v_z dz = 0 \qquad (10)$$

بحل (9),(10) نجد أن

$$\frac{dx}{u_y v_z - u_z v_y} = \frac{dy}{u_z v_x - u_x v_z} = \frac{dz}{u_x v_y - u_y v_x}$$

أى أن

$$\frac{dx}{P} = \frac{dy}{Q} = \frac{dz}{R} \qquad (12)$$

أى أن $u = a, v = b$ هما حل للمعادلة (12) ، وبذلك يكون الحل العام للمعادلة
$Pp + Qq = R$
هو $\phi(u,v) = 0$ حيث ϕ دالة أختيارية، بينما u, v هما حل المعادلة $\frac{dx}{P} = \frac{dy}{Q} = \frac{dz}{R}$
والتي تسمى بمجموعة لاجرانج المساعدة (Lagrange's auxiliary or subsidiary equation)
وهي معادلات تفاضليه عادية

ولحل هذه المعادلات المساعدة توجد أربع طرق :

(أ) إذا كان أحد المتغيرات غير موجود أو يمكن حذفه من أي كسرين من المعادلات فإنه يمكن إجراء عملية التكامل والحصول على تكامل (حل) أول $u = c$ وبتكرار هذه العملية نحصل على تكامل ثان $u = c_2$ ويكون الحل العام $\theta(u, v) = 0$ والأمثلة (1) , (2), (9) توضح ذلك .

(ب) نفترض أننا حصلنا على تكامل أول باستخدام (أ) ولكن لا يمكن الحصول على تكامل ثان بنفس الطريقة . ففي هذه الحالة يمكن استخدام التكامل

الأول في إيجاد التكامل الثاني مع مراعاة في التكامل الثاني بحذف ثابت التكامل في الأول المثال (5) يوضح ذلك .

(ج) من مبادئ الجبر فإن أحدى النسب $\frac{dx}{R}=\frac{dy}{Q}=\frac{dx}{p}$ تساوي $\frac{P_1 dx + G_1 dy + R_1 dz}{P_1P + Q_1Q + R_1R}$ فإذا كان المقام يساوي صفرا فإن البسط يكون $P_1 dx + Q_1 dy + R_1 dz = 0$ والذي يعطي الحل $u(x, y z) = c_1$ ويمكن تكرار هذه العملية باختيار آخر للدوال $P_1(x, y, z), R_1(x, y, z), Q_1(x, y, z)$ تسمى R_1, Q_1, P_1 بالمضاريب (multipliers) وقد تحصل تكامل أول بهذه الطريقة وتكامل ثان إما باستخدام (أ) أو (ب) والأمثله (3) , (4) , (6) , (7) توضح ذلك .

(د) إذا اختبرت الدوال Z_1, G_1, P_1 وهي دوال في x , y , z بحيث يكون $\frac{P_1 dx + G_1 dy + R_1 dz}{P_1P + Q_1Q + R_1R}$ ساديا لأحد الكسور وسكون البسط تفاضل المقام . وقد تستخدم دوال آخر P_2 , Q_2 , R_2 للحصول على تكامل ثان أو تستخدم (أ) ، أو (ب) ، أو (ج) والأمثله (8) , (10) .

٥ - أمثله :

مثال (١)

أوجد الحل العام للمعادلة

$$2p + 3q = 1$$

الحل

معادلات لأجرانج المساعدة هى

$$\frac{dx}{2}=\frac{dy}{3}=\frac{dz}{1}$$

حيث $P=2$, $Q=3$, $R=1$

ونجد أن $\frac{dx}{2}=\frac{dy}{3}$ تعطى $3x-2y=b$

و $\frac{dx}{2}=\frac{dz}{1}$ تعطى $x-2z=a$

إذن الحل العام هو

$$\phi(x-2z,3x-2y)=0$$

نلاحظ هنا أن الحل التام هو

$$x-2z=\alpha(3x-2y)+\beta$$

وهو جزء من الحل العام ، حيث x , B ثابتان .

مثال (٢)

حل المعادلة

$$xp+yq=z$$

الحل

نلاحظ أن

$$P=x \quad , \quad Q=y \quad , \quad R=z$$

وتكون معادلات لاجرانج المساعدة وهي

$$\frac{dx}{x}=\frac{dy}{y}=\frac{dz}{z}$$

$\frac{dx}{x}=\frac{dz}{z}$ تؤدى إلى $\ln x=\ln z+\ln a$ أى $\frac{x}{z}=a$

و $\frac{dy}{y}=\frac{dz}{z}$ تؤدى الى $\ln y=\ln z+\ln b$ أى $\frac{y}{z}=b$

ويكون الحل العام هو

$$\phi(\frac{x}{z},\frac{y}{z})=0$$

مثال (٢)

حل المعادلة

$$zp=-x$$

الحل

$$P=z \quad , \quad Q=0 \quad , \quad R=-x$$

وتكون معادلات لاجرانج المساعدة هي

$$\therefore \frac{dx}{z}=\frac{dy}{0}=\frac{dz}{-x}$$

$$\because dy=0 \qquad \therefore y=a$$

$$\because \frac{dx}{z}=\frac{-dz}{x}$$

$$\therefore x^2+z^2=b$$

ويكون الحل العام هو

$$\phi(y,x^2+z^2)=0$$

مثال (٣)

أوجد الحل العام للمعادلة

$$(y-z)p+(x-y)q=z-x$$

الحل

$$P=y-z \quad , \quad Q=x-y \quad , \quad R=z-x$$

نلاحظ أن

$$P+Q+R=0$$

من المعادلات المساعدة

$$\frac{dx}{P}=\frac{dy}{Q}=\frac{dz}{R}$$

حيث أن مجموع المقدمات على مجموع التوالى = إحدى النسب فإن

$$\therefore dx + dy + dz = 0$$

$$\therefore x + y + z = a$$

وبأخذ (y, z, x) كمضاريب نجد أن .

$$xP + zQ + yR = 0$$

أي أن

$$\therefore xdx + zdy + ydz = d\left(\frac{x^2}{2} + yz\right) = 0$$

$$\therefore \frac{1}{2}x^2 + yz = C$$

حيث C عدد ثابت

أى أن

$$x^2 + 2yz = b \quad , \quad b = 2C$$

ويكون الحل العام هو

$$\phi(x + y + z, x^2 + 2yz) = 0$$

ونلاحظ أن الحل التام

$$x^2 + 2yz = \alpha(x + y + z) + \beta$$

مثال (٤)

أوجد الحل العام للمعادلة

$$(x^2 - y^2 - z^2)p + 2xyq = 2xz$$

الحل

$$P = x^2 - y^2 - z^2 \quad , \quad Q = 2xy \quad , \quad R = 2xz$$

وتكون معادلات لاجرانج المساعدة هي :

$$\therefore \frac{dx}{x^2 - y^2 - z^2} = \frac{dy}{2xy} = \frac{dz}{2xz}$$

وعلى ذلك فإن

من الكسرين الثاني والثالث

$$\because \frac{dy}{2xy}=\frac{dz}{2xz}$$

نحصل على

$$\therefore \ln y=\ln z+\ln a$$

نحصل على

$$\therefore \frac{y}{z}=a$$

وباخذ (x,y,z) كمضاريب نحصل على

$$\because \frac{xdx}{x(x^2-y^2-z^2)}=\frac{ydy}{2xy^2}=\frac{zdz}{2xz^2}$$

أي أن

$$\therefore \frac{xdx+ydy+zdz}{x(x^2-y^2-z^2+2y^2+2z^2)}=\frac{zdz}{2xz^2}$$

أي أن

$$\therefore \frac{2xdx+2ydy+2zdz}{x^2-y^2-z^2+2y^2+2z^2}=\frac{zdz}{z^2}$$

$$\therefore \ln(x^2+y^2+z^2)=\ln z+\ln b$$

أي أن

$$\therefore \frac{x^2+y^2+z^2}{z}=b$$

$\therefore$ الحل العام هو

$$\phi\left(\frac{y}{x},\frac{x^2+y^2+z^2}{z}\right)=0$$

ويكون الحل التام هو

$$x^2+y^2+z^2=\alpha y+\beta z$$

مثال (٥)

حل المعادلة

$$p-2q=3x^2\sin(y+2x)$$

الحل :

تكون معادلات لاجرانج المساعدة هي

$$\frac{dx}{1}=\frac{dy}{-2}=\frac{dz}{3x^2\sin(y+2x)}$$

من الكسرين الأول والثاني

$$\because \frac{dx}{1}=\frac{dy}{-2}$$

$$\therefore y+2x=a$$

من الكسرين الأول والثالث

وكذلك نجد أن

$$\because \frac{dx}{1}=\frac{dz}{3x^2\sin(a)}$$

$$\therefore z=x^3\sin a+b$$

$$\therefore z-x^3\sin(y+2x)=b$$

مثال (٦)

حل المعادلة المساعدة الاتية

$$\frac{dx}{mz-ny}=\frac{dy}{nx-\ell z}=\frac{dz}{\ell y-mx}$$

الحل

بأخذ (l,m,n) كمضاريب نحصل على :

حيث أن

$$\frac{\ell dx}{\ell(mz-ny)}=\frac{mdy}{m(nx-\ell z)}=\frac{ndz}{n(\ell y-mx)}$$

فإن

$$\therefore \frac{ldx}{mxz-nxy}=\frac{mdy}{nxy-\ell zy}=\frac{ndz}{\ell yz-mxz}$$

$$\therefore \ell dx+mdy+ndz=0$$

$$xdx+ydy+zdz=0$$

$$\therefore \ell x+my+nz=a$$

ويكون حل المعادلة المساعدة هو

$$x^2+y^2+z^2=b$$

مثال (٧)

حل المعادلة

$$(x+y)\,z\,p + z\,(n-y)\,q = x^2 + y^2$$

الحل

معادلات لاجرانج المساعدة

$$\frac{dx}{z(x+y)} = \frac{dy}{z(x-y)} = \frac{dz}{x^2+y^2}$$

بأخذ $(x\,,\,y\,,\,z)$ كمضاريب نحصل على

حيث أن

$$(i)\quad \frac{xdx}{xz(x+y)} = \frac{ydy}{yz(x-y)} = \frac{zdz}{z(x^2+y^2)}$$

وكذلك بأخذ (y,x,z) كمضاريب نحصل

$$(ii)\quad \frac{ydx}{yz(x+y)} = \frac{xdy}{xz(x-y)} = \frac{zdz}{z(x^2+y^2)}$$

فـــإن من (i) نجد أن

$$\therefore xdx - ydy - zdz = 0$$

وأن من (ii) نجد أن

$$\therefore ydx + xdy - zdz = 0$$

فنحصل على

$$\therefore x^2 - y^2 - z^2 = a$$

وعلى

$$\therefore 2xy - z^2 = b$$

ملحوظة : يمكن أخذ $(z\,,\,-y\,,\,x)\,,\,(z\,,\,x\,,\,y)$ كمضاريب ونحصل على نفس الحل .

مثال (٨)

حل المعادلة $(1+y)\,p + (1-x)\,q = z$

الحل

معادلات لاجرانج المساعدة :

$$\frac{dx}{1+y} = \frac{dy}{1+x} = \frac{dz}{z}$$

من مبادئ الجبر نجد أن

$$\frac{dz}{z}=\frac{dx+dy}{2+x+y}=\frac{dx-dy}{y-x}$$

من الكسرين الأول والثاني نحصل على

$$\therefore \ln z=\ln(2+x+y)+\ln a$$

من الكسرين الثاني والثالث نحصل على

$$\ln z=-\ln(y-x)+\ln b$$

أي أن

$$\therefore \frac{z}{(2+x+y)}=a$$

وأن

$$\frac{z}{(y-x)}=b$$

مثال (٩)

مثال حل المعادلة

$$c_1p+c_2q+c_3z=0$$

الحل

حيث أن

$$P=c_1 \quad , \quad Q=c_2 \quad , \quad R=-c_3z$$

فإن

$$\therefore \frac{dx}{c_1}=\frac{dy}{c_2}=\frac{dz}{-c_3z}$$

أي

$$\because \frac{dx}{c_1}=\frac{dy}{c_2}$$

أي

$$\therefore c_1y-c_2x=a$$

كذلك

$$\because \frac{dx}{c_1}=\frac{dz}{-c_3z}$$

أي أن
$$\therefore \ln z = \frac{-c_3}{c_1} x + \ln b$$

ومنها
$$\therefore z = b e^{-\frac{c_3}{c_1} x}$$

∴ ويكون الحل العام
$$z = e^{-\frac{c_3}{c_1} x} \phi(c_1 y - c_2 x)$$

مثال (١٠)

أوجد الحل العام للمعادلة
$$y^2 (x - y) p + x^2 (x - y) q = z (x^2 + y^2)$$

الحل:

معادلات لاجرانج المساعدة
$$\frac{dx}{y^2 (x-y)} = \frac{dy}{x^2 (x-y)} = \frac{dz}{z(x^2+y^2)} \qquad (1)$$

من الكسرين الأول والثاني نحصل على $x^3 + y^3 = c_1$

وبأخذ المضاريب $(1 , -1,0)$ فإن كل كسر يساوي .
$$= \frac{dx - dy}{y^2 (x-y) + x^2 (x-y)} = \frac{dx - dy}{(x-y)(x^2 + y^2)} \qquad (2)$$

من الكسر الثالث في (1) مع الكسر في (2) نحصل على
$$\frac{dz}{z (x^2 + y^2)} = \frac{dx - dy}{(x - y)(x^2 + y^2)} \Rightarrow \frac{dz}{z} = \frac{dx - dy}{x - y}$$

وبالتالي $\ln z - \ln (x - y) = \ln c_2$
$$z / (x - y) = c_2$$

ويكون الحل هو $Q \left(x^3 + y^3 , \frac{z}{x - y} \right) = 0$

تمـارين

أوجد الحل العام للمعادلات الاتية

1) $p + q = z$

2) $3p + 4q = 2$

3) $yq - xp = z$

4) $xzp + yzq = xy$

5) $x^2 p + y^2 q = z^2$

6) $zp + yq = x$

7) $zq + py = xz$

8) $p + q = x$

9) $P + q = y$

10) $y^2 p - xyq = x/(z-2y)$

11) $xzp + yzq = xy$

12) $(z^2 - 2yz - y^2)\, p + (xy+xz)q = xy - xz$

13) $p + q = 1$

14) $p \tan x + q \tan y = \tan z$

15) $P + q = x + y + z$

16) $z\,(p-q) = z^2 + (x+y)^2$

17) $xyp + y^2 q = zxy - 2x^2$

18) $p + 3q = 5z - \tan(y - 3x)$

19) $py + qx = xyz^2\,(x^2 - y^2)$

20) $z\,p = -x$

21) $z\,(xp - yq) = y^2 - x^2$

22) $(x-y)p + (x+y)q = 2xz$

٦ - تطبيقات على المعادلات التفاضلية الجزئية

أولاً طريقة فصل المتغيرات:

ليكن $u = u(x_1, x_2, x_3, ..., x_n)$ حلاً وحيداً لمسألة القيمة الحدية.

$$f\,(u, u_{x_1}, u_{x_2}, u_{x_1x_2}, u_{x_1x_1}, u_{x_2x_2}, \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots u_{x_nx_n}) = 0$$

فإن طريقة فصل المتغيرات تفترض ان الحل u يمكن كتابته على الصورة

$$u = f_1(x_1).f_2(x_2).f_3(x_3)...f_n(x_n)$$

بالتعويض عن هذا الحل بالصورة السابقة فى المعادلة التفاضلية الجزئية المعطاه نجد أن الدوال الحقيقية $f_1(x_1), f_2(x_2), f_3(x_3), ..., f_n(x_n)$ تحقق معادلات تفاضلية عادية يمكن حلها وتحقق الشروط الحدية المعطاه ، والامثلة الاتية توضح لنا ذلك.

مثال (١)

حل المعادلة

$$u_x - 3u_y = 0 \qquad (1)$$

حيث

$$u(0, y) = \frac{1}{2}e^{-2y} \quad , \quad x > 0$$

الحل

نفرض أن الحل يمكن وضعه على الصورة

$$u = f_1(x) f_2(y)$$

ومن ذلك نجد أن

$$\therefore u_x = f_1' f_2 \quad , \quad u_y = f_1 f_2'$$

بالتعويض في المعادلة نجد أن

$$\therefore f_1' f_2 - 3f_1 f_2' = 0$$

وعلى ذلك فإن

$$\therefore \frac{f_1'}{3f_1} = \frac{f_2'}{f_2} = k \qquad \text{(مثلا)}$$

وحيث أن الطرف الأيمن دالة في y والطرف الأيسر دالة x ، ولكي تتحقق المعادلة لابد أن كل طرف يساوي نفس الثابت .

$$\frac{f_1'}{3f_1}=k \qquad \text{أي} \qquad f_1=Ae^{3kx}$$

وكذلك

$$\frac{f_2'}{f_2}=k \qquad \text{أي} \qquad f_2=Be^{ky}$$

ويكون الحل

$$\therefore u=ce^{k(3x+y)}$$

وينطبق الشرط المعطى

$$\therefore u(0,y)=ce^{ky}=\frac{1}{2}e^{-2y}$$

$$\therefore c=\frac{1}{2} \quad , \quad k=-2$$

ويكون الحل على الصورة

$$\therefore u(x,y)=\frac{1}{2}e^{-6x-2y}$$

مثال (٢)

حل معادلة لابلاس

ويكون الحل على الصورة

$$u_{xx}+u_{yy}=0$$

الحل

نفترض أن

$$u(x,y)=f_1(x)f_2(y)$$

وعلى ذلك فإن

$$\therefore u_{xx}=f_1''f_2 \quad , \quad u_{yy}=f_1f_2''$$

وبالتعويض في المعادلة والقسمة على f_1f_2 تحصل على

$$\therefore f_1''f_2+f_1f_2''=0 \quad \Rightarrow \quad \frac{f_1''}{f_1}+\frac{f_2''}{f_2}=0$$

وحيث أن الطرف لأيسر دالة في x والطرف الأيمن دالة في y ، ولكي تتحقق المعادلة لابد أن كل طرف يساوي نفس الثابت وليكن k

$$\frac{f_1''}{f_1}=k \quad , \quad \therefore \frac{f_2''}{f_2}=-k$$

يكون لدينا ثلاث حالات للثابت k

$$i)\ k>0 \quad , \quad ii)\ k=0 \quad , \quad iii)\ k<0$$

$$i)\ k>0 \quad \Rightarrow \quad k=\lambda^2$$

$$\therefore f_1''-\lambda^2 f_1=0 \quad , \quad f_2''+\lambda^2 f_2=0$$

وبحل المعادلتين نحصل على

$$\therefore f_1=A_1e^{\lambda x}+B_1e^{-\lambda x} \quad , \quad f_2=A_2\cos(\lambda y)+B_2\sin(\lambda y)$$

وبذلك يكون الحل

$$\therefore u(x,y)=(A_1e^{\lambda x}+B_1e^{-\lambda x})(A_2\cos(\lambda y)+B_2\sin(\lambda y))$$

$$ii)\ k=0$$

وبحل المعادلتين نحصل على

$$\therefore f_1=A_1x+B_1 \quad , \quad f_2=A_2y+B_2$$

ويكون الحل هو

$$\therefore u(x,y)=(A_1x+B_1)(A_2y+B_2)$$

$$iii)\ k<0 \qquad \therefore k=-\alpha^2$$

$$\therefore f_1''+\alpha^2 f_1=0 \quad , \quad f_2''-\alpha^2 f_2=0$$

وبحل المعادلتين نحصل على

$$\therefore f_1=A_1\cos(\alpha x)+B_1\sin(\alpha x)$$

$$\therefore f_2=A_2e^{\alpha y}+B_2e^{-\alpha y}$$

ويكون الحل هو

$$\therefore u(x,y)=(A_1\cos(\alpha x)+B_1\sin(\alpha x))(A_2e^{\alpha y}+B_2e^{-\alpha y})$$

ملحوظة : لإختبار الحل المناسب لابد من استخدام الشروط المعطاه في المسألة

مثال (٣)

حل المعادلة

$$u_t = u_{xx}$$

تحت الشروط

$$u(0,t) - 0 = u(\pi,t)$$
$$u(x,0) = 4\sin 3x$$

الحل

نفترض أن الحل على الصورة

$$u(x,t) = f(x)g(t)$$

وعلى ذلك فإن

$$\therefore u_{xx} = f''g \quad , \quad u_t = fg'$$

$$fg' = f''g \quad \Rightarrow \quad \frac{f''}{f} = \frac{g'}{g} = c$$

لدينا هنا ايضا ثلاث حالات للثابت c

$$i)\, c > 0\,, \quad ii)\, c = 0\,, \quad iii)\, c < 0$$

$$i)\, c > 0 \quad \Rightarrow c = \lambda^2$$

فنحصل على

$$\therefore \frac{g'}{g} = \lambda^2 \quad \Rightarrow \quad g = Ae^{\lambda^2 t}$$

وكذلك

$$\frac{f''}{f} = \lambda^2 \quad \Rightarrow \quad f = B_1 e^{\lambda x} + B_2 e^{-\lambda x}$$

ويكون الحل على الصورة

$$\therefore u(x,y) = e^{\lambda^2 t}(A_1 e^{\lambda x} + A_2 e^{-\lambda x})$$

وهذا مستحيل لانه لا يحقق الشرط المعطى وهو

$$u(x,0) = 4\sin 3x$$

$ii)\ c = 0$

فنحصل على

$$\frac{g^{\backslash}}{g} = 0 \qquad \therefore g = A$$

$$\frac{f''}{f} = 0 \qquad \therefore f = B_1 x + B_2$$

ويكون الحل على الصورة

$$\therefore u(x,t) = A_1 x + A_2$$

وهذا مستحيل لانه لا يحقق الشرط المعطى وهو

$$u(x,0) = 4\sin 3x$$

$iii)\ c < 0 \qquad \therefore c = -\alpha^2$

فنحصل على

$$\frac{g^{\backslash}}{g} = -\alpha^2 \qquad \Rightarrow g = Ae^{-\alpha^2 t}$$

وكذلك

$$\frac{f''}{f} = -\alpha^2 \qquad \Rightarrow f = B_1\cos(\alpha x) + B_2\sin(\alpha x)$$

ويكون الحل هو

$$\therefore u(x,t) = e^{-\alpha^2 t}[A_1\cos(\alpha x) + A_2\sin(\alpha x)]$$

وباستخدام الشروط المعطاه نجد أن

$$u(0,t) = 0 \quad \Rightarrow \quad A_1 = 0$$

$$u(\pi,t) = 0 \quad \Rightarrow \quad A_2\sin(\alpha\pi) = 0$$

إما $A_2 = 0$ (وهذا مستحيل) أو

$$\therefore \sin(\alpha\pi) = 0$$

وهذا يعنى أن α عدد صحيح

$$\alpha = 0, \pm 1, \pm 2, \ldots$$

$$\therefore u(x,t) = A_2 e^{-\alpha^2 t}\sin(\alpha x)$$

وباستخدام الشروط المعطى نجد أن

$$u(x,0) = A_2\sin(\alpha x) = 4\sin(3x)$$

وهذا يعنى

وبذلك يكون الحل على الصورة

$$\alpha = 3 \quad , \quad A_2 = 4$$

$$\therefore u(x,t) = 4e^{-9t}\sin(3x)$$

وهذا هو الحل الوحيد الذى يحقق الشروط الحدية.

تمارين

أوجد الحل العام للمعادلات الآتيه

1) $u_x + u = u_y \quad , \quad u(x,0) = 4e^{-3x}$

2) $u_t = 4u_{xx} \quad , \quad u(0,t) = 0 = u(4,t) \quad , \quad u(x,0) = 5\sin(\pi x)$

3) $u_x = 4u_t \quad , \quad u(0,0) = 10 \quad , \quad u(0,4) = 200$

أوجد جميع الحلول للمعادلة

$$u_{xx} = 2u_{yy} - 12u_y + 4u$$

ثانيا : إستخدام المعادلات التفاضلية فى المسائل التطبيقية

تستخدم المعادلات التفاضلية الجزئية عادة فى المسائل التطبيقية التالية

١) معادلة الموجة Wave Equation

أحادية البعد $\dfrac{\partial^2 u}{\partial t^2} = c^2 \dfrac{\partial^2 u}{\partial x^2}$

ثانية البعد $\Delta u = \dfrac{\partial^2 u}{\partial x\, 2} + \dfrac{\partial^2 u}{\partial y\, 2} = \left(\dfrac{1}{c^2}\right)\dfrac{\partial^2 u}{\partial t\, 2}$

٢) معادلة سريان الحرارة Heat flow equation

أحادية البعد $\dfrac{\partial^2 u}{\partial x^2} = \left(\dfrac{1}{k}\right)\dfrac{\partial u}{\partial t}$

ثانية البعد $\nabla u = \dfrac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \dfrac{\partial^2 4}{\partial y^2} = \left(\dfrac{1}{k}\right)\left(\dfrac{\partial u}{\partial t}\right)$

٣) معادلة لابلاس Laplace equation

$$\nabla^2 u = \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = 0$$

٤) معادلة بواسون Poisson equation

$$\nabla^2 u = \frac{\partial^2 4}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 4}{\partial y^2} = f\ (x_1 y)$$

٥) معادلة البث Radio Equation

$$-\frac{\partial V}{\partial x} = L\frac{\partial I}{\partial t}.$$

$$-\frac{I}{x} = c\frac{\partial V}{\partial t}$$

حيث V هو الجهد ، I التيار L (معامل الحث)

وسوف نستعرض تلك الحالات ببعض الأمثلة

(أ) معادلة الموجة

مثال (١)

إذا شد خيط وثبت من نقطتين المسافة بينهما ℓ وحدثت إزاحة للخيط على الصورة $y = k(\ell x - x^2)$ عند $t = 0$ ، أوجد الإزاحة عند أى لحظة.

الحل

معادلة الموجة هى

$$\frac{\partial^2 y}{\partial t^2} = c^2 \frac{\partial^2 y}{\partial x^2} \qquad (1)$$

وحيث أن نهايتى الخيط مثبتة لكل قيم t فإن

$$y(0,t) = 0 \quad , \quad y(t,0) = 0 \qquad (2)$$

وحيث أن السرعة العرضية (Transverse) للخيط عن أى نقطة تكون صفراً أى أن

$$\left(\frac{\partial y}{\partial t}\right)_{t=0}=0 \qquad (3)$$

كذلك معطى لنا

$$y(x,0)=k(\ell x-x^2) \qquad (4)$$

وعليه تكون المعادلات $(2),(3),(4)$ هى الشروط الحدية للمعادلة (1).

الأن نفترض أن

$$y=f_1(x).f_2(t)$$

فيكون

$$\therefore y_{tt}=f_1.f_2'' \quad , \quad y_{xx}=f_1''.f_2$$

بالتعويض فى (1) نجد ان

$$f_1f_2''=c^2f_1''f_2$$

بالقسمة على f_1f_2 نحصل على

$$\therefore \frac{f_1''}{f_1}=\frac{f_2''}{c^2f_2}=-\alpha^2$$

حيث α^2 ثابت ومنها نحصل على

$$\therefore f_1''+\alpha^2f_1=0$$

$$f_2''+\alpha^2c^2f_2=0$$

وبحل هاتين المعادلتين نحصل على

$$\therefore f_1=c_1\cos\alpha x+c_2\sin\alpha x$$

$$f_2=c_3\cos\alpha ct+c_4\sin\alpha ct$$

وبالتالي يكون الحل هو

$$\therefore y=(c_1\cos\alpha x+c_2\sin\alpha x)(c_3\cos\alpha ct+c_4\sin\alpha ct)$$

باستخدام الشرط

$$\because y(0,t)=0$$

$$\therefore c_1(c_3\cos\alpha ct+c_4\sin\alpha ct)=0$$

فإن

$$\therefore c_1=0$$

وبالتالي فإن

$$\therefore y=c_2\sin\alpha x(c_3\cos\alpha ct+c_4\sin\alpha ct)$$

ويكون الحل هو

باستخدام الشرط

$$\because \left(\frac{\partial y}{\partial t}\right)_{t=0}=0$$

فإن

$$\frac{\partial y}{\partial t}=c_2\sin\alpha x(c_3c\alpha\sin\alpha ct+c_4c\alpha\cos\alpha ct)$$

عندما $t=0$ نجد أن ......

$$\therefore c_2\sin(\alpha x)(c_4c\alpha)=0$$

ولكن $c_2 \neq 0$

وعلى ذلك فإن

$$\therefore c_4 = 0$$

$$\therefore y = c_2 c_3 \sin(\alpha x)\cos(\alpha c x)$$

$$i.e:\ y = A\sin(\alpha x)\cos(\alpha c x)$$

حيث $A = c_2 c_3$

وباستخدام الشرط

$$\because y(\ell,t) = 0$$

نجد أن

$$\therefore A\sin(\alpha\ell)\cos((\alpha c\ell) = 0$$

$$\therefore \sin(\alpha\ell) = 0 \quad \Rightarrow \quad \alpha\ell = n\pi \ ,\ n = 1,2,\ldots$$

$$\therefore \alpha = \frac{n\pi}{\ell}$$

$$\therefore y(x,t) = A_n \sin(\frac{n\pi}{\ell}x)\cos(\frac{n\pi c}{\ell}t)$$

وبالتالى يكون لدينا عدد من الحلول وذلك باخذ قيم n المختلفة وعليه يكون الحل هو مجموع لتلك الحلول.

$$\therefore y = \sum_{n=1}^{\infty} A_n \sin(\frac{n\pi}{\ell}x)\cos(\frac{n\pi c}{\ell}t)$$

وحيث أن

$$\because y(x,0) = k(\ell x - x^2)$$

فإن

$$\therefore (\ell x - x^2) = \sum_{n=1}^{\infty} B_n \sin(\frac{n\pi}{\ell}x)$$

حيث $A_n = kB_n$

وباستخدام متسلسلة فورير (Fourier) نجد أن

$$B_n = \frac{2}{\ell}\int_0^{\ell}(\ell x - x^2)\sin(\frac{n\pi}{\ell}x)dx$$

ولكن

فإن

$$\int x\sin(mx)dx=-\frac{1}{m}x\cos(mx)+\frac{1}{m^2}\sin(mx)$$

$$\int x^2\sin(mx)dx=-\frac{1}{m}x^2\cos(mx)+\frac{2x}{m^2}\sin(mx)+\frac{2}{m^3}\cos(mx)$$

$$\therefore B_n=\frac{2}{\ell}\{(\ell x-x^2)(-\cos(\frac{n\pi}{\ell}x)(\frac{\ell}{n\pi})+(\ell-2x)(\sin(\frac{n\pi}{\ell}x))(\frac{\ell^2}{n^2\pi^2})-$$

$$2\cos(\frac{n\pi}{\ell}x)(\frac{\ell^3}{n^3\pi^3})$$

$$=-2\frac{\ell^3}{n^3\pi^3}[(-1)^n-1](\frac{2}{\ell})$$

$$=\begin{cases}\dfrac{8\ell^3}{n^3\pi^3} & ,\ n\ \text{فردية}\\ 0 & ,\ n\ \text{زوجية}\end{cases}$$

ويكون الحل العام هو

$$\therefore y(x,t)=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{8\ell^3}{n^3\pi^3}\sin(\frac{n\pi}{\ell}x)\cos(\frac{n\pi c}{\ell}t)$$

حيث n عدد فردى .

مثال (٢)

خيط طوله ℓ مثبت من طرفيه. إذا أزيح الخيط من نقطتين لأسفل وأعلى لمسافتين متساويتين من نقطتين على بعد متساوى من الطرفين كما فى الشكل. أستنتج تعبيرعن إزاحة الخيط عند أى زمن t وأثبت ان الازاحة صفر عند نقطة المنتصف.

الحل

الازاحة $y(x,t)$ عند اى نقطة تحقق المعادلة

$$\frac{\partial^2 y}{\partial t^2}=c^2\frac{\partial^2 y}{\partial x^2} \qquad (1)$$

والشروط الحدية هى :

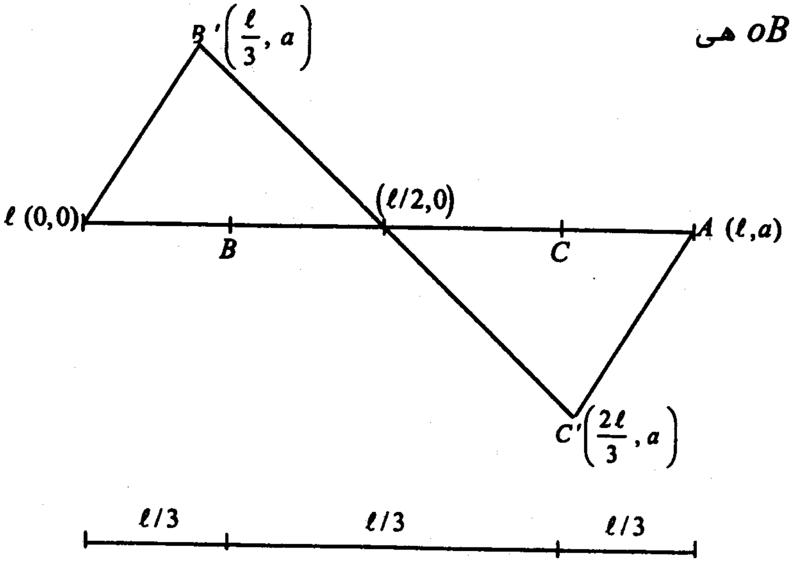
$$y(0,t)=0 \quad , \quad y(\ell,t)=0 \qquad (2)$$

$$\left(\frac{\partial y}{\partial t}\right)_{t=0} \qquad (3)$$

(لاحظ الشروط الحدية فى المثال السابق)

باقى الشروط عند $t=0$ يكون الخيط كما هو مبين بالشكل $B^{\backslash}C^{\backslash}A$

معادلة $oB^{\backslash}$ هى



$$y=\frac{3a}{\ell}x$$

معادلة $B^{\backslash}C^{\backslash}$ هى

$$\frac{y-a}{x-\frac{\ell}{3}}=\frac{a-(-a)}{\frac{\ell}{3}-\frac{2\ell}{3}}$$

أى أن

$$y=\frac{3a}{\ell}(\ell-2x)$$

معادلة $C'A$ هى

$$\frac{y-0}{x-\ell}=\frac{0-(-a)}{\ell-\frac{2\ell}{3}}$$

أى أن

$$y=\frac{3a}{\ell}(x-\ell)$$

وعليه يكون

$$y(x,0)=\frac{3a}{\ell}\begin{cases} x & 0\le x\le \frac{\ell}{3} \\ (\ell-2x) & \frac{1}{3}\ell\le x\le \frac{2}{3}\ell \\ (x-\ell) & \frac{2}{3}\ell\le x\le \ell \end{cases} \qquad (4)$$

حل المعادلة (1) تحت الشروط الحدية (2),(3) هى(انظر المثال السابق)

$$y(x,t)=\sum B_n \sin(\frac{n\pi}{\ell}x)\cos(\frac{n\pi c}{\ell}t)$$

$$\therefore y(x,0)=\sum B_n \sin(\frac{n\pi}{\ell}x)$$

وبإستخدام متسلسلة فورية نحصل على

$$\therefore B_n=\frac{2}{\ell}\{\int_0^{\frac{\ell}{3}} x\sin(\frac{n\pi}{\ell}x)dx+\int_{\frac{\ell}{3}}^{\frac{2\ell}{3}}(\ell-2x)\sin(\frac{n\pi}{\ell}x)dx+$$

$$\int_{\frac{2\ell}{3}}^{\ell}(x-\ell)\sin(\frac{n\pi}{\ell}x)dx\}(\frac{3a}{\ell})$$

نلاحظ ان

$$\int x\sin(mx)dx=-\frac{1}{m}x\cos(mx)+\frac{1}{m^2}\sin(mx)$$

$$\int(\ell-2x)\sin(mx)dx=-\frac{1}{m}(\ell-2x)\cos(mx)-\frac{2}{m^2}\sin(mx)$$

$$\int(x-\ell)\sin(mx)dx=\frac{1}{m^2}\sin(mx)-\frac{1}{m}(x-\ell)\cos(mx)$$

وعلى ذلك فإن

$$\therefore\frac{\ell^2}{6a}B_n=\left\{\frac{\ell^2}{n^2\pi^2}\sin(\frac{n\pi}{\ell}x)-\frac{\ell}{n\pi}x\cos(\frac{n\pi}{\ell}x)\right\}_0^{\ell/3}$$

$$\{\frac{-2\ell^2}{n^2\pi^2}\sin(\frac{n\pi}{\ell}x)-\frac{\ell}{n\pi}(\ell-2x)\cos(\frac{n\pi}{\ell}x)\}_{\ell/3}^{2\ell/3}+$$

$$\{\frac{\ell^2}{n^2\pi^2}\sin(\frac{n\pi}{\ell}x)-\frac{\ell}{n\pi}(x-\ell)\cos(\frac{n\pi}{\ell}x)\}_{2\ell/3}^{\ell}$$

$$=\frac{\ell^2}{n^2\pi^2}\{\sin(\frac{n\pi}{3})-2\sin(\frac{2n\pi}{3})+2\sin(\frac{n\pi}{3})-\sin(\frac{2n\pi}{3})\}-$$

$$\frac{\ell}{n\pi}\{\frac{\ell}{3}\cos(\frac{n\pi}{3})-\frac{\ell}{3}\cos(\frac{2n\pi}{3})-\frac{\ell}{3}\cos(\frac{n\pi}{3})+\frac{\ell}{3}\cos(\frac{2n\pi}{3})\}$$

$$\therefore B_n=\frac{18a}{n^2\pi^2}(\sin(\frac{n\pi}{3})-\sin(\frac{2n\pi}{3}))$$

$$=\frac{18a}{n^2\pi^2}(\sin(\frac{n\pi}{3})-2\sin(\frac{n\pi}{3})\cos(\frac{n\pi}{3}))$$

$$=\frac{18a}{n^2\pi^2}\sin(\frac{n\pi}{3})[1+(-1)^n]$$

$$\therefore B_n=\begin{cases}\dfrac{36a}{n^2\pi^2}\sin(\dfrac{n\pi}{3}) & ,\ n\ \text{زوجية}\\ 0 & ,\ n\ \text{فردية}\end{cases}$$

$$\therefore y(x,t)=\sum_{n=2,4,\dots}\frac{36a}{n^2\pi^2}\sin(\frac{n\pi}{3})\sin(\frac{n\pi}{\ell}x)\cos(\frac{n\pi c}{\ell}t)$$

بأخذ $n=2m$ حيث $m=1,2,3,\dots$

$$\therefore y(x,t)=\sum_{m=1}^{\infty}\frac{9a}{m^2\pi^2}\sin(\frac{2m\pi}{3})\sin(\frac{2m\pi}{\ell}x)\cos(\frac{2m\pi c}{\ell}t)$$

بوضع $x=\frac{1}{2}\ell$ نجد أن

$$y(x,t)=0 \quad\Rightarrow\quad y(\frac{1}{2}\ell,t)=0$$

ب) معادلة سريان الحرارة (احادية البعد)

مثال (١)

قضيب طوله ℓ معزول (Insulated) الجوانب ومنتظم الحرارة ابتدائياً. إذا برد طرفيه لدرجة الصفر وثبت عندها ، أثبت ان حالة الحرارة $u(x,t)$ تعطى من العلاقة

$$u(x,t)=\sum_{n=1}^{\infty}b_n\sin(\frac{n\pi x}{\ell})\exp\{-\frac{n^2c^2\pi^2}{\ell^2}t\}$$

حيث b_n تعطى من العلاقة

$$u_0=\sum_{n=1}^{\infty}b_n\sin(\frac{n\pi}{\ell}x)$$

الحل

لتكن معادلة سريان الحرارة هى

$$\frac{\partial u}{\partial t}=c^2\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}$$

نفترض أن الحل على الصورة

$$u(x,t)=f_1(x).f_2(t)$$

$$\therefore u_t=f_1.f_2^{\backslash} \quad , \quad u_{xx}=f_1^{\backslash\backslash}.f_2$$

بالتعويض في المعادلة نحصل على

$$\therefore f_1 f_2^{\backslash}=c^2 f_1^{\backslash\backslash} f_2$$

وبالنسبة $f_1\, f_2$ نحصل على

$$\therefore \frac{f_1^{\backslash\backslash}}{f_1}=\frac{f_2^{\backslash}}{c^2 f_2}=-\alpha^2$$ مثلا

ومن ذلك نجد أن

$$f_1^{\backslash\backslash}+\alpha^2 f_1=0 \quad \rightarrow \quad f_1=c_2\cos(\alpha x)+c_3\sin(\alpha x)$$

$$f_2^{\backslash}=-\alpha^2 c^2 f_2$$

$$\therefore f_2=c_1 e^{-\alpha^2 c^2 t}$$

$$\therefore u=e^{-\alpha^2 c^2 t}(A\cos(\alpha x)+B\sin(\alpha x|))$$

حيث

$$A=c_1 c_2 \quad , \quad B=c_1 c_3$$

$$\therefore A=0$$

وباستخدام الشرط $u(\ell,l)=0$ نجد أن

$$Sin\ \alpha\ell=0 \quad \Rightarrow \alpha\ \ell=n\ \pi$$

$$\therefore u(x,t)=B_n e^{-\frac{n^2\pi^2c^2}{\ell^2}t}\sin(\frac{n\pi}{\ell}x)$$

(كما سبق) يكون الحل على الصورة

$$u(x,t)=\sum_{n=1}^{\infty}B_n e^{-\frac{n^2\pi^2c^2}{\ell^2}t}\sin(\frac{n\pi}{\ell}x)$$

من الشروط الابتدائية $u\ (x\ ,0)=u_o$ نجد أن

$$\therefore u_0=\sum_{n=1}^{\infty}b_n\sin(\frac{n\pi}{\ell}x)$$

مثال (٢)

إذا كانت A,B هما نهايتي قضيب طوله $20cm$ ودرجتي حرارتهما 30^0C ، 80^0 على الترتيب حتى تسود حالة التوازن Steady إذا غيرت درجتي حرارة الطرفين إلى $60^0C,40^0C$ على الترتيب. أوجد توزيع الحرارة عند الزمن t.

الحل

توزيع الحرارة الابتدائى هو

$$u = 30 + \frac{80-30}{\ell}x = 30 + \frac{5}{2}x$$

والتوزيع النهائى هو

$$u = 40 + \frac{60-40}{\ell}x = 40 + x$$

حيث $\ell = 20$ (طول القضيب)

نفترض أن توزيع الحرارة يعطى من

$$u(x,t) = u_1(x,t) + u_2(x)$$

حيث $u_2(x)$ هو توزيع الحرارة فى حالة الاتزان، أى أن $u_2(x) = 40 + x$ ، $u_1(x,t)$ هو توزيع الحرارة الانتقالى والذى يؤول الى الصفر عند زيادة t وتحقق المعادلة

$$\frac{\partial u_1}{\partial t} = c^2 \frac{\partial^2 u_1}{\partial x^2}$$

فيكون الحل (كما فى المثال السابق)

$$\therefore u(x,t) = \sum B_n e^{-(\frac{n\pi}{20})^2 c^2 t} \sin(\frac{n\pi}{20}x)$$

وعليه يكون

$$u(x,t) = 40 + x + \sum B_n e^{-(\frac{n\pi}{20})^2 c^2 t} \sin(\frac{n\pi}{20}x)$$

ولكن عند $t = 0$ فإن

بالتالي يكون لدينا

$$u = 30 + \frac{5}{2}x$$

$$\therefore 30 + \frac{5}{2}x = 40 + x + \sum B_n \sin(\frac{n\pi}{20}x)$$

$$\therefore \frac{3}{2}x - 10 = \sum B_n \sin(\frac{n\pi}{20}x)$$

كما سبق في أمثلة سابقة ، فإن (باستخدام متسلسله فورير) نجد أن :

$$B_n = \frac{2}{20}\int_0^{20}(\frac{3}{2}x - 10)\sin(\frac{n\pi}{20}x)dx$$

$$= \frac{1}{10}\left\{\frac{3}{2}\left[\frac{400}{n^2\pi^2}\sin(\frac{n\pi}{20}x) - \frac{20}{n\pi}x\cos(\frac{n\pi}{20}x)\right]_0^{20} + \frac{200}{n\pi}\cos(\frac{n\pi}{20}x)\Big]_0^{20}\right\}$$

$$= \frac{1}{10}\{\frac{3}{2}[-\frac{400}{n\pi}\cos(n\pi)] + \frac{200}{n\pi}[\cos n\pi - 1]\}$$

$$= \frac{1}{10}\{-\frac{400}{n\pi}\cos n\pi - \frac{200}{n\pi}\}$$

$$\therefore B_n = \frac{-20}{n\pi}(2\cos n\pi + 1)$$

$$\therefore u(x,t) = 40 + x - \frac{20}{\pi}\sum_{n=1}^{\infty}(\frac{2\cos n\pi + 1}{n})e^{-(\frac{cn\pi}{20})^2 t}\sin(\frac{n\pi}{20}x)$$

ج) معادلة لابلاس

مثال (١)

حل المعادلة

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}=0 \qquad (1)$$

التي تحقق الشروط الآتية

$$u(0,y)=u(\ell,y)=u(x,0)=0\ ,$$

$$u(x,a)=\sin(\frac{n\pi}{\ell}x)$$

الحل

نفترض أن الحل على الصورة

$$u=f_1(x)f_2(y)$$

$$\therefore u_{xx}=f_1''f_2\quad ,\quad u_{yy}=f_1f_2''$$

بالتعويض في المعادلة والقسمة على $f_1 f_2$ نحصل على

$$\therefore \frac{f_1''}{f_1}+\frac{f_2''}{f_2}=0$$

$$\therefore \frac{f_1''}{f_1}=-\frac{f_2''}{f_2}=-\alpha^2 \quad \text{مثلا}$$

فنحصل على

$$\therefore f_1''+\alpha^2 f_1=0$$

ويكون حلها هو

$$\therefore f_1=c_1\cos(\alpha x)+c_2\sin(\alpha x)$$

وكذلك

$$f_2''-\alpha^2 f_2=0$$

ويكون حلها

$$f_2=c_3e^{\alpha y}+c_4e^{-\alpha y}$$

ويكون الحل العام هو

$$\therefore u(x,y)=(c_1\cos(\alpha x)+c_2\sin(\alpha x))(c_3e^{\alpha y}+c_4e^{-\alpha y})$$

الأن نستخدم الشروط المعطاه لايجاد c_1,c_2,c_3,c_4

$$u(0,y)=0 \;\rightarrow\; c_1(c_3e^{\alpha y}+c_4e^{-\alpha y})=0 \;\rightarrow\; c_1=0$$

وبالتالي فإن

$$\therefore u(x,y)=(Ae^{\alpha y}+Be^{-\alpha y})\sin\alpha x$$

حيث $A=c_2c_3 \quad , \quad B=c_2c_4$

وكذلك حيث أن

$$u(\ell,0)=0 \;\rightarrow\; \sin(\alpha\ell)=0 \;\rightarrow\; \alpha\ell=n\pi \;\rightarrow\; \alpha=\frac{n\pi}{\ell}$$

ويكون الحل على الصورة

$$\therefore u(x,y)=(Ae^{\frac{n\pi}{\ell}y}+Be^{-\frac{n\pi}{\ell}})\sin(\frac{n\pi}{\ell}x)$$

وحيث أن

$$u(x,0)=0 \;\rightarrow\; (A+B)\sin(\frac{n\pi}{\ell}x)=0$$

$$\therefore A=-B=C$$

مثلا

فيكون الحل على الصورة

$$\therefore u(x,y)=C(e^{\frac{n\pi}{\ell}y}-e^{-\frac{n\pi}{\ell}y})\sin(\frac{n\pi}{\ell}x)$$

ومنها

$$\therefore u(x,y)=2C\sinh(\frac{n\pi}{\ell}y)\sin(\frac{n\pi}{\ell}x)$$

باستخدام الشرط المعطى نجد أن .

$$u(x,a)=\sin(\frac{n\pi}{\ell}x)=2C\sinh(\frac{n\pi a}{\ell})\sin(\frac{n\pi}{\ell}x)$$

$$\therefore C=\frac{1}{2\sinh(\frac{n\pi a}{\ell})}$$

ويكون الحل النهائي على الصورة

$$\therefore u(x,y)=\sin(\frac{n\pi}{\ell}x)\frac{\sinh(\frac{n\pi}{\ell}y)}{\sinh(\frac{n\pi}{\ell}a)}$$

د) معادلات البث

مثال (١)

حل المعادلات الآتية

$$\frac{\partial V}{\partial x}=-L\frac{\partial I}{\partial t} \quad , \quad \frac{\partial I}{\partial x}=-c\frac{\partial V}{\partial t}$$

والتي تحقق الشروط الآتية

$$I(x,0)=I_0 \quad , \quad V(x,0)=V_0 \sin\left(\frac{\pi x}{\ell}\right)$$

الحل

$$\therefore \frac{\partial V}{\partial x}=-L\frac{\partial I}{\partial t} \qquad (1)$$

$$\frac{\partial I}{\partial x}=-c\frac{\partial V}{\partial t} \qquad (2)$$

بتفاضل المعادلة (١) بالنسبة إلى x والمعادلة (٢) بالنسبة إلى t نحصل على

$$\frac{\partial^2 V}{\partial x^2}=-L\frac{\partial^2 I}{\partial x\,\partial t} \quad , \quad \frac{\partial^2 I}{\partial t\,\partial x}=-c\frac{\partial^2 V}{\partial t^2}$$

منها نحصل على

$$\frac{\partial^2 V}{\partial x^2}=Lc\frac{\partial^2 V}{\partial t^2}$$

نفترض أن

$$V=f_1(x)f_2(t)$$

فيكون

$$\therefore \frac{\partial^2 V}{\partial x^2}=f_1''f_2 \quad , \quad \frac{\partial^2 V}{\partial t^2}=f_1 f_2''$$

بالتعويض في المعادلة (١) نحصل على

$$\therefore f_1''f_2=Lcf_1f_2''$$

وبالقسمة على f_2f_1 نجد أن ....

$$\therefore \frac{f_1''}{f_1}=Lc\frac{f_2''}{f_2}=-\alpha^2 \qquad \text{مثلا}$$

(وكما سبق) نجد ان

$$f_1 = c_1 \cos(\alpha x) + c_2 \sin(\alpha x)$$

$$f_2 = c_3 \cos(\frac{\alpha t}{\sqrt{Lc}}) + c_4 \sin(\frac{\alpha t}{\sqrt{Lc}})$$

ويكون الحل هو

$$\therefore V(x,t) = (c_1 \cos(\alpha x) + c_2 \sin(\alpha x))(c_3 \cos(\frac{\alpha t}{\sqrt{Lc}}) + c_4 \sin(\frac{\alpha t}{\sqrt{Lc}}))$$

ومن الشرط

$$V(x,0) = V_0 \sin(\frac{\pi x}{\ell})$$

نحصل على

$$\therefore V_0 \sin(\frac{\pi x}{\ell}) = c_3(c_1 \cos(\alpha x) + c_2 \sin(\alpha x))$$

ومنها نجد أن

$$\therefore c_1 c_3 = 0 \quad \rightarrow \quad c_1 = 0$$

$$c_2 c_3 = V_0 \quad , \quad \alpha = \frac{\pi}{\ell}$$

ويكون الحل $v(x,t)$ على الصورة

$$\therefore V(x,t) = [V_0 \cos(\frac{\pi t}{\ell\sqrt{Lc}}) + A \sin(\frac{\pi t}{\ell\sqrt{Lc}})] \sin(\frac{\pi x}{\ell})$$

حيث $A = c_2 c_4$

وباستخدام الشروط المعطاة أي عندما $t = 0$ فإن

$$\frac{\partial V}{\partial t} = 0 \ , V(x,0) = V_o \sin\left(\frac{\pi x}{\ell}\right), \frac{\partial t}{\partial x} = 0 \ , I = I_o = \text{ثابت}$$

$$\frac{\partial V}{\partial t} = \sin(\frac{\pi x}{\ell})[-V_0 \frac{\pi}{\ell\sqrt{Lc}} \sin(\frac{\pi t}{\ell\sqrt{Lc}}) + \frac{A\pi}{\ell\sqrt{Lc}} \cos(\frac{\pi t}{\ell\sqrt{Lc}})]$$

وعندما $t = 0$ نجد أن

$$\therefore 0 = \sin(\frac{\pi x}{\ell})[\frac{A\pi}{\ell\sqrt{Lc}}] \quad \rightarrow \quad A = 0$$

$$\therefore V(x,t) = V_0 \sin(\frac{\pi x}{\ell}) \cos(\frac{\pi x}{\ell\sqrt{Lc}}).$$

ولايجاد $I(x,t)$ نتبع التالي

$$\frac{\partial I}{\partial t}=-\frac{1}{L}\frac{\partial V}{\partial x}$$

$$=-\frac{V_0}{L}\frac{\pi}{\ell}\cos(\frac{\pi x}{\ell})\cos(\frac{\pi t}{\ell\sqrt{Lc}})$$

$$\therefore I=-\frac{V_0\pi}{\ell L}.\frac{\ell\sqrt{Lc}}{\pi}\cos(\frac{\pi x}{\ell})\sin(\frac{\pi t}{\ell\sqrt{Lc}})+f(x)$$

$$\therefore I(x,t)=-V_0\sqrt{\frac{c}{L}}\cos(\frac{\pi x}{\ell})\sin(\frac{\pi t}{\ell\sqrt{Lc}})+f(x)$$

حيث $f(x)$ ثابت (التكامل بالنسبة إلى t)

ايضا

$$\frac{\partial I}{\partial x}=-c\frac{\partial V}{\partial t}=cV_0\frac{\pi}{\ell\sqrt{Lc}}\sin(\frac{\pi t}{\ell\sqrt{Lc}})\sin(\frac{\pi x}{\ell})$$

$$\therefore I=\frac{cV_0\pi}{\ell\sqrt{Lc}}.\frac{\ell}{\pi}\cos(\frac{\pi x}{\ell})\sin(\frac{\pi t}{\ell\sqrt{Lc}})+F(t)$$

$$\therefore I(x,t)=-V_0\sqrt{\frac{c}{L}}\cos(\frac{\pi x}{\ell})\sin(\frac{\pi t}{\ell\sqrt{Lc}})+F(t)$$

حيث $F(t)$ ثابت (التكامل بالنسبة إلى x)

وحيث ان $I=I_0$ عند $t=0$

$$I(x,t)=I_0-V_0\sqrt{\frac{c}{L}}\cos(\frac{\pi x}{\ell})\sin(\frac{\pi t}{\ell\sqrt{Lc}}).$$

تمـارين

١) حل المعادلة

$$\frac{\partial u}{\partial t}=\alpha^2\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}$$

فى الحالات الاتية

أ) $u=0$ عندما $x=0$, $x=\ell$ لجميع قيم t.

ب) $u=3\sin(\frac{\pi x}{\ell})$ عندما $t=0$ لجميع قيم x حيث $0<x<\ell$

٢) حل المعادلة

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2}=\alpha^2\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}$$

التى تحقق الشروط

$$u(0,t)=u(\ell,t)=0 \quad , \quad u(x,0)=0$$

$$\left(\frac{\partial u}{\partial t}\right)_{t=0}=\phi(x)$$

٣) حل المعادلة

$$\frac{\partial^2 y}{\partial x^2}=\frac{1}{c^2}\frac{\partial^2 y}{\partial t^2}$$

التى تحقق الشروط الاتية

$$y(0,t)=y(\ell,t)=0$$

$$y(x,0)=\phi(x) \quad , \quad \frac{\partial y}{\partial t}(x,0)=\psi(x)$$

٤) أوجد حل المعادلة $\frac{\partial y}{\partial t}=3\left(\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}\right)$ تحت الشرط

$$u(0,t)=2, 2(1,t)=3, u(x,0)=x(1-x)$$

$$t>0\,,\,0=\le x\le 1$$

٥) أوجد الحل العام للمعادلة $\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = 6\left(\frac{\partial^2 u}{\partial t^2}\right)$ تحت الشروط

$u(0,1)=0\ ,u(a,t)=0$

$u(x,o)=f(x)$

$\frac{\partial u}{\partial t}=u(x,0)=g(x)$

٦) أوجد الحل العام للمعادلة : $\frac{\partial u}{\partial t} = 3\,\frac{\partial^2 u'}{\partial x^2}$

$u(0,t)=0\ ,u(2,0)=0\ ,t\ 70\ ,0<x<2$

$u(x,0)=x\ \ ,\ 0<x<2$

الباب الثامن

متسلسلة فورير

Fourier Series

الباب الثامن

متسلسلة فورير

Fourier Series

١- مقدمة :

لقد أثبت فورييرأنه يمكن التعبير عن دالة ما وحيدة القيمة على مدى محدود على الصورة

$$f(x)=\frac{1}{2}a_0+\sum_{n=1}^{\infty}[a_n\cos nx+b_n\sin nx] \qquad (1)$$

حيث $a_0, a_i, b_i, ...$ ، $i=1,2,3,...$ ثوابت.

تسمى هذه العملية بالتحليل التوافقى harmonic analysis . وتسمى المتسلسلة (١) بمتسلسلة فوريير للدالة $f(x)$. كما نلاحظ أنه إذا تغيرت x بالمقدار 2π أو أى من مضاعفاتها الموجبة أو السالبة ، فإن كل حد من الطرف الأيمن فى (١) لايتغير أى أن منحنى الدالة يكرر نفسه كل فترة 2π.

٢- الدالة الدورية Periodic Function

يقال أن الدالة $f(x)$ دالة دورية ولها الدورة T إذا كان

$$f(x+T)=f(x)$$

حيث T عدد ثابت.

نلاحظ أن $\sin x, \cos x, \tan x, \sin 3x, \cos\frac{x}{5}, \tan(\frac{4}{3}x)$ لهم الدورة $2\pi, 2\pi, \pi, \frac{2\pi}{3}, 10\pi, \frac{3}{4}\pi$ على الترتيب.

٣- منحنى الدالة الدورية

يكفى للدالة الدورية $f(x)$ التى لها الدورة T أن نرسمها على الفترة $[0,T]$ مثلا، ثم نكرر منحناها على كل فترة أخرى طولها T.

٤- نظرية تكامل الدالة الدورية

ليكن $f(x)$ دالة دورية لها الدورة T فإن

$$\int_a^{a+T} f(x)dx = \int_0^T f(x)dx$$

البرهان

$$\int_a^{a+T} f(x)dx = \int_a^T f(x)dx \int_T^{a+T} f(x)dx$$

ولكن

$$\int_T^{a+T} f(x)dx = \int_0^a f(x_1+T)dx_1 = \int_0^a f(x_1)dx_1$$

وعلى ذلك فإن

$$\int_a^{a+T} f(x)dx = \int_a^T f(x)dx + \int_0^a f(x)dx = \int_0^T f(x)dx.$$

ونلاحظ أن

$$\int_{-T}^0 f(x)dx = \int_0^T f(x)dx = \int_T^{2T} f(x)dx = \int_{2T}^{3T} f(x)dx.$$

٥- تغير الدورة

نعرف أنه ليست كل الدوال لها الدورة 2π ولذلك سنلجاء إلى تغير دورة الدالة 2π.

ليكن $f(x)$ لها الدورة T ، أى أن $f(x+T)=f(x)$ لكل قيم x. ونفرض أن $x=ku$ حيث k ثابت موجب|. وعلى ذلك فإن

$$f(ku+T)=f(ku)$$

وليكن $f_1(u)=f(ku)$ وعلى ذلك فإن

$$f(ku+T)=f(k(u+\frac{T}{k}))=f_1(u+\frac{T}{k})$$

$$\therefore f_1(u+\frac{T}{k})=f_1(u)$$

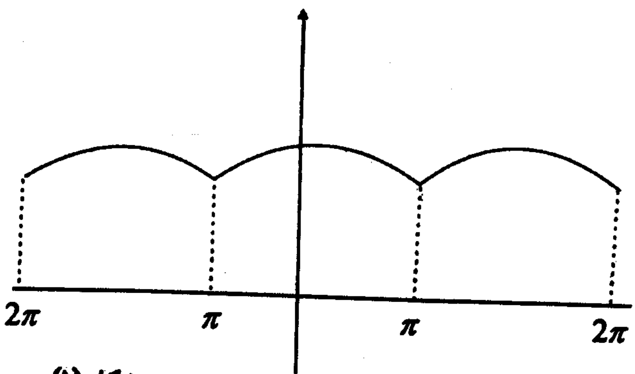
وعلى ذلك فإن $f_1(u)$ دالة دورية لها الدورة $\frac{T}{k}$ ، نختار k بحيث أن $\frac{T}{k}=2\pi$ وعلى ذلك فإن $k=\frac{T}{2\pi}$. ومن ذلك نرى أن التحويل $x=\frac{T}{2\pi}u$ يحول الدالة $f(x)$ إلى الدالة $f_1(u)$ والتي لها الدورة 2π.

٦- أنواع خاصة من الدوال الدورية

يوجد أربعة أنواع من الدوال الدورية والتى تتميز بصفة التماثل (بدرجة ما) ويمكن التميزفيما بينهم بمجرد النظر إلى منحنياتها.

(أ) الدالة الزوجية Even function

هى دالة دورية لها الدورة 2π ولها الخاصية $f(x)=f(-x)$ وفيها $f(\pi+x)=f(\pi-x)$ كما في شكل (١) .



شكل (١)

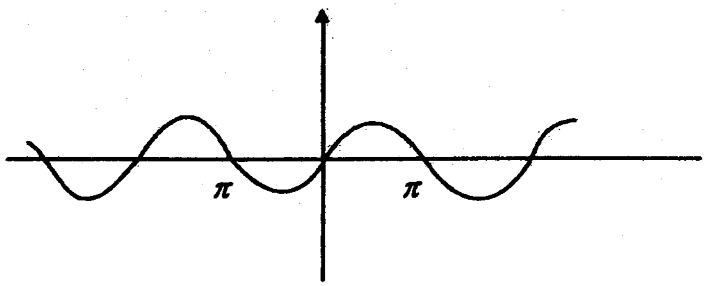
وذلك لأن

$$f(\pi+x)=f(-\pi-x)=f(2\pi-\pi-x)=f(\pi-x)$$

تبين العلاقة $f(x)=f(-x)$ أن منحنى الدالة متماثل حول المحور y ، بينما تبين العلاقة $f(\pi+x)=f(\pi-x)$ أن المنحنى متماثل حول المستقيم $x=\pi$.

(ب) الدالة الفردية **Odd function**

لها الخاصية $f(x) = -f(-x)$ كما في شكل (٢)



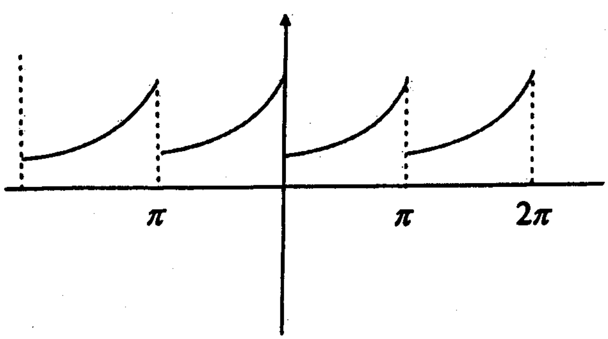
شكل (٢)

ونلاحظ أن $f(0) = 0$, $f(\pi + x) = -f(\pi - x)$

وأن المنحنى متماثل حول نقطة الأصل.

ح) دالة زوجية التوافق **Even harmonic function**

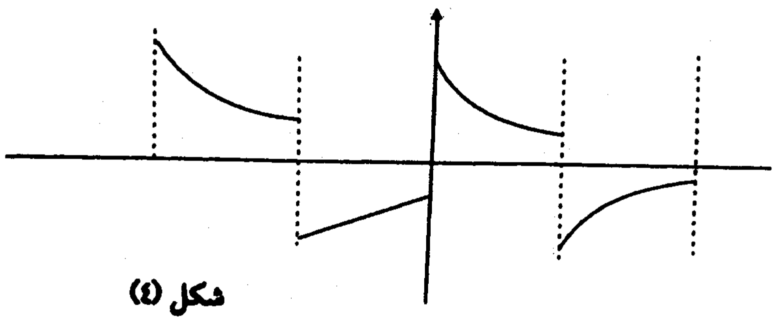
ولها الخاصية $f(\pi + x) = f(x)$ كما في شكل (٣)



شكل (٣)

د) دالة فردية التوافق Odd harmonic function

ولها الخاصية $f(\pi + x) = -f(x)$ كما في شكل (٤)



شكل (٤)

٧) بعض التكاملات الخاصة

سوف نحتاج إلى بعض التكاملات المحدودة فى دراستنا لمتسلسلة فورييروهى

$$i)\ \int_0^{2\pi} \sin(nx)dx = \int_0^{2\pi} \cos(nx)dx = 0$$

وحيث n عدد صحيح موجب

$$ii)\ \int_0^{2\pi} \sin(nx)\sin(mx)dx = \int_0^{2\pi} \cos(nx)\cos(mx)dx$$

$$= \int_0^{2\pi} \sin(nx)\cos(mx) = 0 \ , \qquad m \neq n$$

$$iii)\ \int_0^{2T} \cos^2(nx)dx = \int_0^{2T} \sin^2(nx)dx = \pi$$

n عدد صحيح

نظرية : آى دالة دورية . وحيدة القيمة ولها الدورة 2π يمكن التعبير عنها بالمتسلسلة

$$f(x) = \frac{1}{2}a_0 + \sum_{n=-1}^{\infty}[a_n \cos(nx) + b_n \sin(nx)] \qquad (1)$$

حيث

$$a_0 = \frac{1}{\pi}\int_0^{2\pi} f(x)dx$$

$$a_n = \frac{1}{\pi}\int_0^{2\pi} f(x)\cos(nx)dx$$

$$b_n = \frac{1}{\pi}\int_0^{2\pi} f(x)\sin(nx)dx$$

البرهان

بتكامل المتسلسلة (١) بالنسبة إلى x من 0 إلى 2π نحصل على

$$\int_0^{2\pi} f(x)dx = \frac{1}{2}a_0\int_0^{2\pi} dx = \frac{1}{2}a_0 2\pi = \pi a_0$$

$$\therefore a_0 = \frac{1}{\pi}\int_0^{2\pi} f(x)dx$$

وبضرب طرفى (١) فى $\cos(nx)$ والتكامل من 0 إلى 2π نحصل على

$$\int_0^{2\pi} f(x)\cos(nx)dx = 0 + a_n\int_0^{2\pi}\cos^2(nx)dx = 0 + a_n\pi$$

$$\therefore a_n = \frac{1}{\pi}\int_0^{2\pi} f(x)\cos(nx)dx$$

وبالمثل بضرب طرفى (١) فى $\sin(nx)$ والتكامل من 0 إلى 2π نحصل على

$$b_n = \frac{1}{\pi}\int_0^{2\pi} f(x)\sin(nx)dx$$

قد إستخدمنا في البرهان نتائج التكاملات المحدودة الخاصة السابق ذكرها.

٨- تبسيط معاملات فورير

سوف نعطى بعض التبسيط لمعاملات متسلسلة فورير للدالة الدورية $f(x)$ ولها الدورة 2λ (عموماً).

(أ) دوال دورية لها خاصية واحدة

i) الدالة الزوجية

ولها الخاصية $f(-x) = f(x)$ وتكون متسلسلة فورير لها هى

$$f(x) = \frac{1}{2}a_0 + \sum_{n=1}^{\infty} a_n \cos(\frac{n\pi}{\lambda})x$$

حيث

$$a_0 = \frac{2}{\lambda}\int_0^{\lambda} f(x)dx \quad , \quad a_n = \frac{2}{\lambda}\int_0^{\lambda} f(x)\cos(\frac{n\pi}{\lambda}x)dx \quad , \; b_n = 0$$

ii) الدالة الفردية

ولها الخاصية $f(-x) = -f(x)$ وتكون متسلسلة فورير لها هى

$$f(x) = \sum_{n=1}^{\infty} b_n \sin(\frac{n\pi x}{\lambda})$$

حيث

$$b_n = \frac{2}{\lambda}\int_0^{\lambda} f(x)\sin(\frac{n\pi x}{\lambda})dx \quad , \quad a_o = o \; , \; a_n = 0$$

iii) دالة زوجية التوافق

ولها الخاصية $f(\lambda + x) = f(x)$ وتكون متسلسلة فورير لها على الصورة

$$f(x) = \frac{1}{2}a_0 + \sum_{n=0}^{\infty} a_{2m} \cos(\frac{2m\pi}{\lambda}x) + b_{2m} \sin(\frac{2m\pi}{\lambda}x)$$

حيث

$$a_0 = \frac{2}{\lambda}\int_0^{\lambda} f(x)dx \quad , \quad a_{2m} = \frac{2}{\lambda}\int_0^{\lambda} f(x)\cos(\frac{2m\pi}{\lambda}x)dx$$

$$b_{2m} = \frac{2}{\lambda}\int_0^{\lambda} f(x)\sin(\frac{2m\pi}{\lambda}x)dx$$

iv) دالة فردية التوافق

ولها الخاصية $f(\lambda + x) = -f(x)$ وتكون متسلسلة فورير لها على الصورة

$$f(x) = \sum_{m=1}^{\infty} a_{2m+1}\cos(2m+1)\frac{\pi}{\lambda}x + b_{2m+1}\sin(2m+1)\frac{\pi}{\lambda}x$$

حيث

$$a_{2m+1} = \frac{2}{\lambda}\int_0^{\lambda} f(x)\cos(2m+1)\frac{\pi}{\lambda}xdx$$

$$b_{2m+1} = \frac{2}{\lambda}\int_0^{\lambda} f(x)\sin(2m+1)\frac{\pi}{\lambda}xdx$$

(ب) دوال دورية لها خاصيتين:

I) دالة زوجية وزوجية التوافق

لها الخاصية $f(\lambda + x) = f(x) \ , \ f(-x) = f(x)$ وتكون متسلسلة فورير لها على الصورة

$$f(x) = \frac{1}{2}a_0 + \sum_{m=1}^{\infty} a_{2m}\cos(2m\frac{\pi}{\lambda}x)$$

حيث

$$a_0 = \frac{4}{\lambda}\int_0^{\frac{\lambda}{2}} f(x)dx \ , \quad a_{2m} = \frac{4}{\lambda}\int_0^{\frac{\lambda}{2}} f(x)\cos(2m\frac{\pi}{\lambda}x)dx$$

ii) دالة زوجية وفردية التوافق :

لها الخاصية $f(\lambda + x) = -f(x) \ , \ f(-x) = f(x)$

وتكون متسلسلة فورير لها على الصورة

$$f(x)=\sum_{m=0}^{\infty} a_{2m+1}\cos(2m+1)\frac{\pi}{\lambda}x$$

حيث أن

$$a_{2m+1}=\frac{4}{\lambda}\int_{0}^{\frac{\lambda}{2}} f(x)\cos(2m+1)\frac{\pi}{\lambda}x\,dx$$

iii) دالة فردية وزوجية التوافق :

لها الخاصية $f(\lambda+x)=f(x)$, $f(-x)=-f(x)$

وتكون متسلسلة فورير لها على الصورة

$$f(x)=\sum_{n=0}^{\infty} b_{2m}\sin(2m)\frac{\pi}{\lambda}x$$

حيث

$$b_{2m}=\frac{4}{\lambda}\int_{o}^{\frac{\lambda}{2}} f(x)\sin(2m)\frac{\pi}{\lambda}x\,ds$$

iv) دالة فردية وفردية التوافق

لها الخاصية $f(\lambda+x)=-f(x)$, $f(-x)=-f(x)$

وتكون متسلسلة فورير لها على الصورة

$$f(x)=\sum_{m=0}^{\infty} b_{2m+1}\sin(2m+1)\frac{\pi}{\lambda}x$$

حيث أن

$$b_{2m+1}=\frac{4}{\lambda}\int_{0}^{\frac{\lambda}{2}} f(x)\sin(2m+1)\frac{\pi}{\lambda}x\,dx$$

ملحوظة : إذا كانت الدالة $f(x)$ لها الدورة 2π فإننا نضع فى العلاقات السابقة 2π بدلاً من 2λ ونحصل على علاقات بسيطة.

(٨) أمثلة :

مثال (١)

أوجد متسلسلة فورير للدالة

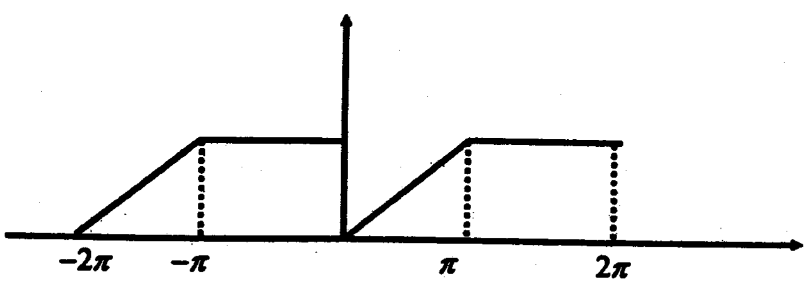
$$f(x)=\begin{cases} x & , \ 0\le x\le\pi \\ \pi & , \ \pi\le x\le 2\pi \end{cases}$$

الحل

الدالة المعطاة لها الدورة 2π. ومن الشكل نرى أنها لاتحقق أى من الخواص الأربعة وهى

$$f(-x)=\pm f(x), \qquad f(\lambda+x)=\pm f(x)$$

وبذلك نستخدم الصيغة العامة



شكل ٥

$$f(x)=\frac{1}{2}a_0+\sum_{n=1}^{\infty}[a_n\cos nx+b_n\sin nx]$$

$$a_0=\frac{1}{\pi}\int_0^{2\pi}f(x)dx=\frac{1}{\pi}\{\int_0^{\pi}x\,dx+\int_{\pi}^{2\pi}\pi dx\}=\frac{3}{2}\pi$$

$$\therefore \frac{1}{2}a_0 = \frac{3}{4}\pi$$

$$a_n = \frac{1}{\pi}\int_0^{2\pi} f(x)\cos(nx)dx = \frac{1}{\pi}\{\int_0^{\pi} x\cos(nx)dx + \int_{\pi}^{2\pi}\pi\cos(nx)dx\}$$

$$= \frac{1}{\pi}[\frac{\cos(n\pi)-1}{n^2} + 0] = \frac{\cos(n\pi)-1}{\pi n^2}$$

$$b_n = \frac{1}{\pi}\int_0^{2\pi} f(x)\sin(nx)dx = \frac{1}{\pi}\{\int_0^{\pi} x\sin(nx)dx + \int_{\pi}^{2\pi}\pi\sin(nx)dx\}$$

$$= \frac{1}{\pi}[\frac{-\pi\cos(n\pi)}{n} + \frac{\pi}{n}(\cos(n\pi)-1)] = \frac{-1}{n}$$

وعلى ذلك فإن

$$f(x) = \frac{3}{4}\pi + \frac{1}{\pi}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\cos(n\pi)-1}{n^2}\cos(nx) - \frac{1}{n}\sin(nx)$$

مثال (٢)

أوجد متسلسلة فورييرللدالة

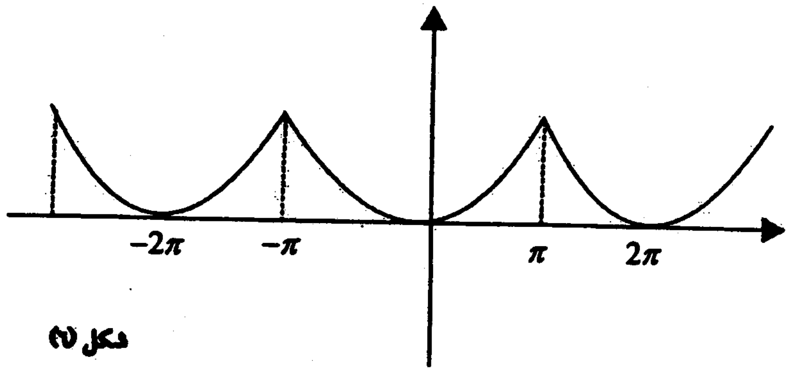
$$f(x) = x^2 \quad , \quad -\pi \le x \le \pi$$

وأثبت أن

$$\frac{\pi^2}{8} = \sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{(2n+1)^2}$$

الحل

الدالة لها الدورة 2π ومن الشكل نرى أنها دالة زوجية أى أن $f(x) = f(-x)$ و على ذلك فإن $b_n = 0$ وتكون



شكل (٢)

$$f(x)\frac{1}{2}a_0+\sum_{n=1}^{\infty}a_n\cos(nx)$$

$$a_0=\frac{2}{\pi}\int_0^{\pi}f(x)dx=\frac{2}{\pi}\int_0^{\pi}x^2dx=\frac{2}{3}\pi^2$$

$$a_n=\frac{2}{\pi}\int_0^{\pi}f(x)\cos(n\pi)dx=\frac{2}{\pi}\int_0^{\pi}x^2\cos(nx)dx=\frac{4\cos(n\pi)}{n^2}=\frac{4}{n^2}(-1)^n$$

وبذلك يكون

$$f(x)=x^2=\frac{\pi^2}{3}+\sum_{n=1}^{\infty}4(-1)^n\frac{\cos(n\pi x)}{n^2} \qquad (1)$$

بوضع $x=0$ نحصل على

$$0=\frac{\pi^2}{3}-4[\frac{1}{1^2}-\frac{1}{2^2}+\frac{1}{3^2}-\frac{1}{4^2}+...] \qquad (2)$$

وبوضع $x=\pi$ فى (١) نحصل على

$$\pi^2=\frac{\pi^2}{3}-4[-\frac{1}{1^2}-\frac{1}{2^2}-\frac{1}{3^2}-...]$$

$$\frac{\pi^2}{6}=\frac{1}{1^2}+\frac{1}{2^2}+\frac{1}{3^2}+\frac{1}{4^2}+\dots \qquad (3)$$

من (٢) ، (٣) نحصل على

$$\frac{\pi^2}{8}=\frac{1}{1^2}+\frac{1}{3^2}+\frac{1}{5^2}+\dots=\sum_{n-1}^{\infty}\frac{1}{(2n+1)^2}$$

وهو المطلوب.

مثال (٣)

عبر عن الدالة

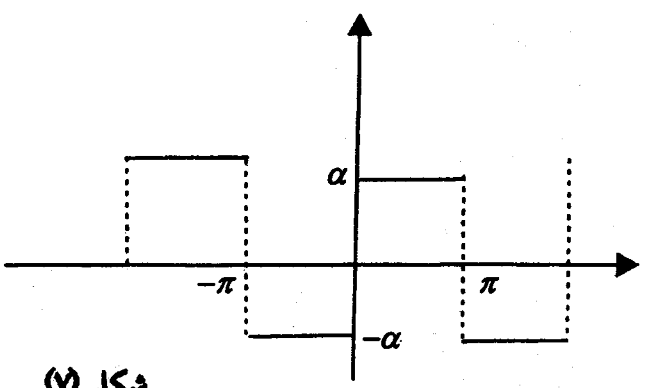
$$f(x)=\begin{cases} a & , \quad 0<x<\pi \\ -a & , \quad \pi\le x\le 2\pi \end{cases}$$

فى صورة متسلسلة فورير.

الحل

من الشكل نرى أن $f(x+\pi)=-f(x) \quad , \quad f(x)=-f(-x)$

أى أن الدالة فردية ولها خاصية فردية التوافق وتكون متسلسلة فورير على الصورة



شكل (٧)

$$f(x)=\sum_{m=0}^{\infty} b_{2m+1}\sin(2m+1)x$$

حيث أن

$$b_{2m+1}=\frac{4}{\pi}\int_0^{\frac{\pi}{2}} f(x)\sin(2m+1)x\,dx=\frac{4}{\pi}\int_0^{\frac{\pi}{2}} a\sin(2m+1)x\,dx$$

$$=\frac{4a}{\pi(2m+1)}$$

ويذلك يكون

$$f(x)=\frac{4a}{\pi}\sum_{m=0}^{\infty}\frac{\sin(2m+1)}{2m+1}$$

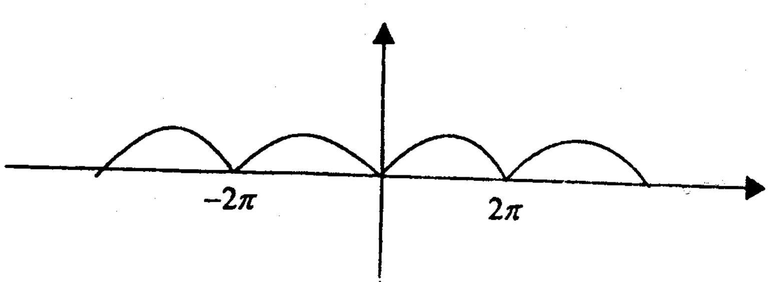
مثال (٤)

عبر عن الدالة $0<x<2\pi \quad , \quad f(x)=|\sin x|$ بدلالة متسلسلة فورير.

الحل

نرى من الشكل أن الدالة زوجية وكذلك لها خاصية زوجيه التوافق اى أن

$$f(x)=f(-x)\ ,\quad f(x+\pi)=f(\pi)$$



شكل ٥

وبذلك تكون متسلسلة فوريير على الصورة

$$f(x)=\frac{1}{2}a_0+\sum_{m=1}^{\infty}a_{2m}\cos(2mx)$$

حيث

$$a_0=\frac{4}{\pi}\int_0^{\frac{\pi}{2}}f(x)dx=\frac{4}{\pi}\int_0^{\frac{\pi}{2}}\sin x dx=\frac{4}{\pi}$$

$$a_{2m}=\frac{4}{\pi}\int_0^{\frac{\pi}{2}}f(x)\cos(2mx)dx=\frac{4}{\pi}\int_0^{\frac{\pi}{2}}\sin x\cos(2mx)dx=\frac{4}{\pi}\frac{1}{(1+2m)(1-2m)}$$

وعلى ذلك فإن

$$f(x)=\frac{2}{\pi}+\frac{4}{\pi}\sum_{m=1}^{\infty}\frac{1}{(1+2m)(1-2m)}\cos(2mx)=\frac{2}{\pi}+\frac{4}{\pi}\sum_{m=1}\frac{1}{\left(1-4m^2\right)}ces\ 2mx$$

مثال (٥)

أوجد متسلسلة الجيب ومتسلسلة جيب التمام للدالة

$$f(x)=2x-4\quad,\quad 0<x<4$$

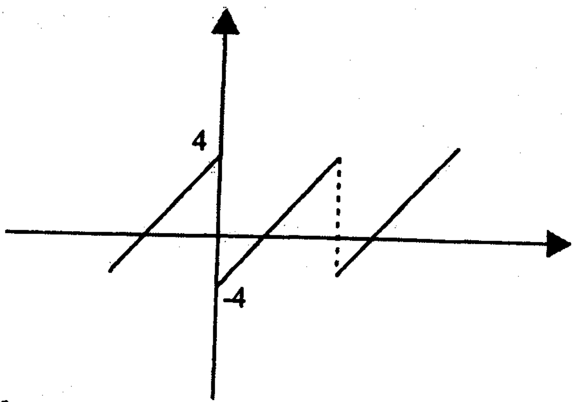
حيث الدالة $f(x)$ داله دورية لها الدورة $2\lambda=8$.

الحل

أ) متسلسلة الجيب:

حيث أن $f(x)=-f(-x)$ ونرى من الشكل أيضاً $f(x+\lambda)=f(x)$ $\lambda=4$

وبذلك تكون متسلسلة فوريير على الصورة



شكل (٩)

$$f(x)=\sum_{m=1}^{\infty} b_{2m}\sin(2m)\frac{\pi}{\lambda}x=\sum_{m=1}^{\infty} b_{2m}\sin(\frac{m\pi}{2})x$$

حيث أن

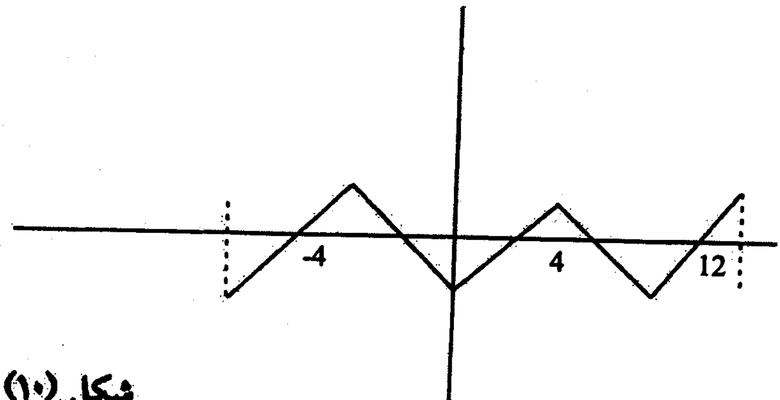
$$b_{2m}=\frac{4}{\lambda}\int_0^{\frac{\lambda}{2}} f(x)\sin(2m)\frac{\pi}{\lambda}x dx=\frac{4}{4}\int_0^{2}(2x-4)\sin(\frac{m\pi x}{2})dx=\frac{-8}{m\pi}$$

وعلى ذلك فإن

$$f(x)=\frac{-8}{\pi}\sum_{m=1}^{\infty}\frac{1}{m}\sin(\frac{m\pi x}{2}).$$

ب) متسلسلة جيب التمام:

أى أن $f(-x)=f(x)$ ومن الشكل نرى أن $f(x+\lambda)=-f(x)$، وبذلك تكون متسلسلة فورير كما في الشكل



شكل (١٠)

$$f(x)=\sum_{m=0}^{\infty}a_{2m+1}\cos(2m+1)\frac{\pi}{\lambda}x=\sum_{m=0}^{\infty}a_{2m+1}\cos(2m+1)\frac{\pi}{4}x$$

حيث أن

$$a_{2m+1}=\frac{4}{\lambda}\int_{0}^{\frac{\lambda}{2}}f(x)\cos(2m+1)\frac{\pi}{\lambda}xdx=\frac{4}{4}\int_{0}^{2}(2x-4)\cos(2m+1)\frac{\pi}{4}dx$$

$$=\frac{-16}{(2m+1)^2\pi^2}$$

وبذلك تكون متسلسلة فورير هى

$$f(x)=\frac{-16}{\pi^2}\sum_{m=0}^{\infty}\frac{1}{(2m+1)^2}\cos(2m+1)\frac{\pi}{4}x.$$

تمـارين

١- أوجد متسلسلة فورير للدالة

$$f(x)=\begin{cases}\dfrac{b}{a}x & , \quad 0<x<a\\[2mm] \dfrac{b}{\pi-a}(\pi-x) & , \quad a<x<\pi\end{cases}$$

٢- أوجد متسلسلة فورير للدالة

$$f(x)=\begin{cases}e^{-x} & , \quad 0<x<\pi\\ -e^{-(x+\pi)} & , \quad -\pi<x<0\end{cases}$$

٣- عبر عن الدالة $f(x)=1-\sin x$ ، $0<x<\dfrac{\pi}{2}$ فى صورة متسلسلة فورير فردية وزوجية الترافق .

٤- فك الدالة

$$f(x)=\begin{cases}0 & , \quad -6\le x\le -3\\ x+3 & , \quad -3\le x\le 0\\ 3-x & , \quad 0<x\le 3\\ 0 & , \quad 3\le x\le 6\end{cases}$$

فى صورة متسلسلة فورير.

٥- أوجد متسلسلة فورير للدوال

$$(i)\, f(x)=\begin{cases} \dfrac{\pi}{2}-x & , \quad 0<x<\pi \\[2ex] \dfrac{\pi}{2}+x & , \quad -\pi<x<0 \end{cases}$$

$$(ii)\, f(x)=\begin{cases} 1-\cos x & , \quad 0<x<\dfrac{\pi}{2} \\[2ex] \sin x & , \quad \dfrac{\pi}{2}<x<\pi \end{cases}$$

واستنتج أن

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n-1}}{(2n-1)^3}=\frac{\pi^3}{32}.$$

٦- فــك الدالــة $f(x)=\begin{cases} 0 & ..\pi<x<0 \\ x & 0\le x\le\pi \end{cases}$ في صــورة متسلســلة فــورير علــى الـ $[-\pi\,,\,\pi]$

وأثبت أن .... $\dfrac{\pi^2}{8}=1+\dfrac{1}{3^2}+\dfrac{1}{5^2}+\ldots\ldots$

٧- أوجد متسلسلة فورير للدالة $f(x)=|x|$ على الفترة $[-b1]$

٨- أوجد متسلسلة فورير للدالة $f(x)=\begin{cases} -2x & ..\pi<x<0 \\ 3x & 0\le x\le\pi \end{cases}$

٩ - أوجد متسلسلة فورير للدوال التالية :

$(i)\ f(x)=x|x|\ m\ \ -\pi\le x\le\pi$

$(ii)\ f(x)=e^{x}\ \ -\pi\le x\le\pi$

$(iii)\ f(x)=|x\sin x|\ \ -6\le x\le 6$

$(iv)\ f(x)=2x+1\ ,\ -1\le x\le 1$

$$(v)\ f(x)=\begin{cases}0 & -3\le x<0\\ 1 & 0\le x<3\end{cases}$$

$$(vi)\ f(x)=\begin{cases}0 & -4\le x\le 0\\ 2 & 0<x\le 4\end{cases}$$

الباب التاسع

مسائل شترم ليوفيل

Liouville –Sturm Problem

الباب التاسع
مسائل شترم ليوفيل
Sturm-Liouville Proplem

١- مقدمة :

نعتبر مسألة القيمة الحدية التالية :

أ- معادلة تفاضلية خطية متجانسة من الرتبة الثانية على الصورة :

$$\frac{d}{dx}(p(x)\frac{dy}{dx}) + [q(x) + \lambda r(x)\frac{dy}{dx}]y = 0 \qquad (1)$$

حيث p و q و r دوال حقيقية بحيث p لها مشتقة متصلة و q و r دالتان متصلتان و$0 < p$ و $0 < r$ لكل قيم x على الفترة $a \le x \le b$ و λ بارا متر لا يعتمد على x .

أ- **شرطان حديان**

$$\left.\begin{aligned} A_1 y(a) + A_2 y'(a) = 0 \\ B_1 y(b) + B_2 y'(b) = 0 \end{aligned}\right\} \qquad (2)$$

حيث A_1 و A_2 و B_1 و B_2 ثوابت بحيث إن A_1 و A_2 لا يتلاشيان معاً وكذلك B_1 و B_2 لا يتلاشيان معاً.

تسمى هذه المسألة بمسألة شترم- ليوفيل أو نظام شترم- ليوفيل .

٢- أمثلة

مثال (١):

لنفترض الآن مسألة القيمة الحدية

$$\frac{d^2y}{dx^2}+\lambda y=0 \qquad (3)$$
$$y(0)=0 \quad ,y'(\pi)=0 \qquad (4)$$

وهي مسألة شترم- ليوفيل، ويمكن كتابة المعادلة (3) على الصورة .

$$\frac{d}{dx}(1.\frac{dy}{dx})+(0+\lambda.1\frac{dy}{dx})y=0$$

أي أن $p=1$ و $q=0$ و $r=1$ والشروط الحدية (4) حالة خاصة من الشروط (٢).

مثال (٢) :

ليكن لدينا مسألة شترم- ليوفيل :

$$\frac{d}{dx}[x\frac{dy}{dx}]+(2x^2+\lambda x^3)y=0 \qquad (5)$$
$$\left.\begin{aligned}3y(1)+4y'(1)=0\\5y(2)-3y'(2)=0\end{aligned}\right\} \qquad (6)$$

حيث $p=x$ و $q=2x^2$ و $r=x^3$ و $a=1$ و $b=2$ و $A_1=3$ و $A_2=4$ و $B_1=5$ و $B_2=-3$ ، ومن الواضح أن الحل البديهي $y=0$ يحقق المعادلة والشروط المعطاة، لذلك نبحث عن الحل غير البديهي (غير الصفري) الذي يحقق المعادلة والشروط المعطاة ويلاحظ أن هذا الحل يعتمد على λ .

مثال (٣) :

إوجد الحلول غير البديهية لمسألة شترم ليوفيل

$$\frac{d^2y}{dx^2}+\lambda y=0 \qquad (3)$$
$$y(0)=0 \quad ,y(\pi)=0 \qquad (4)$$

الحل :

سندرس ثلاث حالات منفصلة وهي $\lambda = 0$ ، $\lambda < 0$ و $\lambda > 0$.

(i) $\lambda = 0$ ، في هذه الحالة تؤول المعادلة التفاضلية (3) إلى

$$\frac{d^2y}{dx^2} = 0$$

ويكون حلها هو

$$y = c_1 + c_2 x \tag{7}$$

وباستخدام الشروط (٤) نجد أن

$$y(0) = c_1 = 0, y(\pi) = c_1 + c_2\pi = 0$$

وهذا يؤدي إلى $c_1 = c_2 = 0$ وبذلك نحصل على الحل الصفري أي نرفض هذا الحل.

(ii) $\lambda < 0$ ، في هذه الحالة تكون المعادلة المساعدة $m^2 + \lambda = 0$ و جذراها هما $\pm\sqrt{-\lambda}$ ، وحيث إن $\lambda < 0$ ، فإن هذين الجذرين حقيقيان وغير متساويين وبوضع $\sqrt{-\lambda} = \alpha$ ، فيكون الحل هو

$$y = c_1 e^{\alpha x} + c_2 e^{-\alpha x} \tag{8}$$

و باستخدام الشروط (٤) نجد أن

$$y(0) = 0 \Rightarrow c_1 + c_2 = 0,$$
$$y(\pi) = 0 \Rightarrow c_1 e^{\alpha\pi} + c_2 e^{-\alpha\pi} = 0$$

و بحل هاتين المعادلتين نجد أن $c_1 = c_2 = 0$ ، وهذا يؤدي إلى الحل الصفري ونرفض هذا الحل أيضاً .

(iii) $\lambda > 0$ ، في هذه الحالة يكون جذرا المعادلة المساعدة هما $\pm\sqrt{\lambda}i$ ويكون الحل على الصورة .

$$y = c_1 \sin\sqrt{\lambda}x + c_2 \cos\sqrt{\lambda}x \qquad (9)$$

باستخدام الشرط $y(0)=0$ نحصل على $c_2 = 0$ ، وباستخدام الشرط $y(\pi)=0$ فنحصل على $c_1 \sin\sqrt{\lambda}\pi = 0$ في هذه الحالة لا نأخذ $c_1 = 0$ و إلا حصلنا على الحل الصفري، و هو غير مطلوب ولذلك نضع $\sin\sqrt{\lambda}\pi = 0$ ، فإذا كان $n > 0$ ، فإن $\sin n\pi = 0$ فقط إذا كان n عدد صحيح $\sqrt{\lambda} = n, n = 1,2,3,.....$ وعلى ذلك

$$\lambda = n^2, \qquad n = 1,2,3,..... \qquad (10)$$

تسمى هذه القيمة بالقيم الذاتية(Characteristic values) ويسمى الحل غير الصفري المناظر بالدوال الذاتية (المميزة) (Characteristic functions). و بذلك تكون الدوال الذاتية $y = c_n \sin nx, n = 1,2,3,...$ حيث $c_n , n = 1,2,3,...$ ثوابت اختيارية غير صفرية.

مثال (٤):

إوجد القيم الذاتية والدوال الذاتية لمسألة شترم- ليوفيل

$$\frac{d}{dx}(x\frac{dy}{dx}) + \frac{\lambda}{x}y = 0 \qquad (11)$$

$$y'(1) = 0 \quad , y'(e^{2\pi}) = 0 \qquad (12)$$

حيث λ بارامتر غير سالب.

الحل:

سوف ندرس الحالتين $\lambda = 0$ و $\lambda > 0$.

إذا كانت $\lambda = 0$ ، فإن المعادلة التفاضلية (11) تؤول إلى $\frac{d}{dx}(x\frac{dy}{dx}) = 0$ ، ويكون حلها العام هو

$$y = c\ \ln|x| + c_0$$

حيث c_0 و c ثابتان اختياريان. إذا طبقنا الشروط (12) لهذا الحل نجد أن في كليهما $c = 0$ ولكن أي منها لم يضع أي قيود على c_0 ، وبالتالي $\lambda = 0$ تعطي الحل $y = c_0$ ، حيث c_0 ثابت اختياري. وعلى ذلك يكون $\lambda = 0$ القيمة الذاتية والدالة الذاتية المناظرة هي $y = c_0$.

أما إذا كانت $\lambda > 0$ ، فإننا نرى أنه عندما تكون $x \neq 0$ ، فإن المعادلة تؤول إلى معادلة كوشى – أويلر

$$x^2\frac{d^2y}{dx^2} + x\frac{dy}{dx} + \lambda y = 0 \qquad (13)$$

وباستخدام التعويض $x = e^t$ فإن المعادلة (13) تؤول إلى

$$\frac{d^2y}{dt^2} + \lambda y = 0 \qquad (14)$$

وحيث إن $\lambda > 0$ فإن الحل العام للمعادلة (14) يكون

$$y = c_1 \sin\sqrt{\lambda}t + c_2 \cos\sqrt{\lambda}t$$

وبالتالي عندما $\lambda > 0$ و $x > 0$ ، يمكن كتابة حل المعادلة (١١) على الصورة

$$y = c_1 \sin(\sqrt{\lambda}\ \ln x) + c_2 \cos(\sqrt{\lambda}\ \ln x) \qquad (15)$$

والآن باستخدام الشروط الحدية (12)، فإننا من (15) نجد أن

$$y=\frac{c_1\sqrt{\lambda}}{x}\cos(\sqrt{\lambda}\ln x)-\frac{c_2\sqrt{\lambda}}{x}\sin(\sqrt{\lambda}\ln x) \qquad (16)$$

حيث $x>0$ باستخدام الشرط $y'(1)=0$ في المعادلة (16) نحصل على

$$c_1\sqrt{\lambda}\cos(\sqrt{\lambda}\ln 1)-c_2\sqrt{\lambda}\sin(\sqrt{\lambda}\ln 1)=0$$

أي $c_1\sqrt{\lambda}=0$ (لأن $\ln 1=0$)، لذلك يجب أن نأخذ

$$c_1=0 \qquad (17)$$

وباستخدام الشرط الثاني $y'(e^{2\pi})=0$ في المعادلة (16) نحصل على

$$c_1\sqrt{\lambda}e^{-2\pi}\cos(\sqrt{\lambda}\ln e^{2\pi})-c_2\sqrt{\lambda}e^{-2\pi}\sin(\sqrt{\lambda}\ln e^{2\pi})=0$$

حيث إن $c_1=0$ من (17) وإن $\ln e^{2\pi}=2\pi$ فإن هذه المعادلة تؤول إلى

$$c_2\sqrt{\lambda}e^{-2\pi}\sin(2\pi\sqrt{\lambda})=0$$

وحيث إن $c_1=0$، فإن اختيار $c_2=0$ يؤدي إلى الحل الصفري، لذلك نأخذ $\sin(2\pi\sqrt{\lambda})=0$ وبالتالي $2\pi\sqrt{\lambda}=n\pi$ حيث $n=1,2,3,...$ وعلى ذلك لتحقيق الشرط الثاني يجب أن يكون

$$\lambda=\frac{n^2}{4},\quad n=1,2,3,... \qquad (18)$$

وطبقاً لقيمة λ هذه و $x>0$ فإن الحلول غير الصفرية

$$y = c_n \cos(\frac{n \ln x}{2}), \quad n = 1,2,3,... \qquad (19)$$

حيث $c_n, n = 1,2,3,...$ ثوابت اختيارية، وعلى ذلك فإن قيم $\lambda = 0, \frac{1}{4}, 1, \frac{9}{4}, 4, \frac{25}{4}, ...$ معطاة بالعلاقة (18)، $n \geq 0$ هي القيم الذاتية للمسألة المعطاة، وأن الدوال $c_0, c_1 \cos(\frac{\ln x}{2}), c_2 \cos(\ln x), c_2 \cos(\frac{3 \ln x}{2}), ...$ المعطاة المعادلة بالعلاقة (19)، $n \geq 0$ حيث $c_n, n = 0,1,2,3,...$ ثوابت اختيارية غير صفرية هي الدوال الذاتية المناظرة.

في كل مسائل شترم - ليوفيل المعطاة بالأمثلة السابقة وجدنا عدداً لا نهائي من القيم الذاتية ونلاحظ أن في كل مثال يمكن ترتيب القيم الذاتية في صورة متتابعة تزايدية مطردة $\lambda_1 < \lambda_2 < \lambda_3 < ....$

بحيث $\lambda_n \to +\infty$ عندما $n \to +\infty$.

وهذا الجدل يقودنا إلى النظرية التالية :

نظرية :

في مسائل شترم - ليوفيل (1) و (2) يكون لدينا :

(I) يوجد عدد لا نهائي من القيم الذاتية $\lambda_n, \; n = 1,2,3,...$ ، للمسألة المعطاة، ويمكن ترتيبها على شكل متتابعة تزايدية مطردة

$$\lambda_1 < \lambda_2 < \lambda_3 < ....$$

بحيث إن $\lambda_n \to +\infty$ عندما $n \to +\infty$

(II) طبقاً لكل قيمة λ_n ، $n = 1,2,3,...$ يوجد عائلة بارامتر واحد للدوال المميزة Φ_n. وكل من هذه الدوال المميزة معرفة على $a \le x \le b$ ، وأن أي دالتين مميزتين مناظرة لنفس القيمة الذاتية تكون إحداهما مضاعفة للأخرى.

(III) كل دالة ذاتية Φ_n مناظرة للقيم الذاتية λ_n و $n = 1,2,3,...$ لها أصفار عددها $(n-1)$ في الفترة $a < x < b$.

ملحوظة: في المثال (٢) نلاحظ تحقق النتيجتين (I) و (II). من النظرية والقيم الذاتية اللانهائية $\lambda_n = n^2$ ، $n = 1,2,3,...$ يمكن ترتيبها في متتابعة تزايدية مطردة لا نهائية أي $1 < 4 < 9 < 16 < 25 < ....$

وأن الدوال الذاتية المناظرة $c_n \sin(nx)$ و $c_n \neq 0$ المناظرة لقيم $\lambda_n = n^2$ و $n = 1,2,3,...$ لها الخاصية المشار إليها.

وفي النتيجة (III) من النظرية نجد أن كل دالة ذاتية $c_n \sin(n\pi)$ ، $c_n \neq 0$ مناظرة إلى $\lambda_n = n^2$ و $n = 1,2,3,...$ لها بالتمام $(n-1)$ صفر في الفترة $0 < x < \pi$ ، ونعرف أن $\sin(nx) = 0$ إذا و فقط إذا كان $nx = k\pi$ حيث k عدد صحيح وبالتالي أصفار $c_n \sin(nx)$ هي

$$k = 0, \pm1, \pm2, \pm3, ... ، \quad x = \frac{k\pi}{n} \qquad (٢٠)$$

والأصفار في (٢٠) التي تقع في الفترة المفتوحة $0 < x < \pi$ هي المناظرة لقيم $(n-1)$ و $n = 1,2,3,...$ وهذا يؤكد النتيجة (III) من النظرية أي أن كل دالة ذاتية $c_n \sin(nx)$ لها $(n-1)$ صفر في الفترة المفتوحة .

تمارين

إوجد القيم والدوالة الذاتية لمسائل شترم - ليوفيل التالية :

$$i)\ \frac{d^2y}{dx^2}+\lambda y=0, \qquad y(0)=0, \quad y(\frac{\pi}{2})=0$$

$$ii)\ \frac{d^2y}{dx^2}+\lambda y=0; \qquad y(0)=0, \quad y(L)=0,\ L>0$$

$$iii)\ \frac{d^2y}{dx^2}+\lambda y=0, \qquad y(0)=0, \quad y(\pi)-y'(\pi)=0$$

$$iv)\ \frac{d^2y}{dx^2}+\lambda y=0, \qquad y(0)-y'(0)=0, \quad y(\pi)-y'(\pi)=0$$

$$v)\ \frac{d}{dx}[x\frac{dy}{dx}]+\frac{\lambda}{x}y=0, \qquad y(1)=0, \quad y(e^{\pi})=0$$

$$vi)\ \frac{d}{dx}[x\frac{dy}{dx}]+\frac{\lambda}{x}y=0, \qquad y(1)=0, \quad y'(e^{\pi})=0$$

$$vii)\ \frac{d}{dx}[(x^2+1)\frac{dy}{dx}]+\frac{\lambda}{x^2+1}y=0, \qquad y(0)=0, \quad y(1)=0$$

[تنويه: ضع $x=\tan t$].

ملحق

ملحــــق

أولاً : دالة جاما Gamma Function

تعرف هذه الدالة بالتكامل

$$\Gamma(x) = \int_0^\infty e^{-t} t^{x-1} dt \qquad (1)$$

حيث x عدد حقيقي (وقد يكون عدد مركب ويحقق $Re z > 0$)

وعندما $x = 1$ تؤول المعادلة (1) إلى

$$\Gamma(1) = \int_0^\infty e^{-t} dt = 1 \qquad (2)$$

وبإجراء تكامل المعادلة (١) بالتجزئي نحصل على

$$\Gamma(x) = \frac{1}{x} \int_0^\infty e^{-t} t^{x} dt = \frac{1}{x} \Gamma(x+1)$$

ومنها نجد أن

$$\Gamma(x+1) = x\,\Gamma(x) \qquad (3)$$

وبوضع .... , $n = 1 , 2 , 3$ في المعادلة (3) نحصل على

$$\Gamma(2) = \Gamma(1+1) = 1\Gamma(1) = 1$$
$$\Gamma(3) = 2\,\Gamma(2) = 2!$$
$$\Gamma(4) = 3\,\Gamma(3) = 3! \qquad (4)$$

....

وهكذا

$$\Gamma(n) = (n-1)!$$

حيث n عدد صحيح

أما إذا كانت n عدد غير صحيح فإننا تستخدم (3) مع العلم بأن $\Gamma\left(\frac{1}{2}\right)=\sqrt{\pi}$ ومن ذلك يمكن حساب .

$$\Gamma\left(\frac{3}{2}\right)=\frac{1}{2}\Gamma\left(\frac{1}{2}\right)=\frac{1}{2}\sqrt{\pi}$$

والعملية العكسية أيضاً :

$$\Gamma\left(\frac{1}{2}\right)=\frac{\Gamma\left(\frac{3}{2}\right)}{\frac{1}{2}}=\frac{\frac{1}{2}\sqrt{\pi}}{\frac{1}{2}}=\sqrt{\pi}$$

$$\Gamma\left(-\frac{1}{2}\right)=\frac{\Gamma\left(-\frac{1}{2}+1\right)}{-\frac{1}{2}}=-2\sqrt{\pi}$$

$$\Gamma\left(-\frac{3}{2}\right)=\frac{\Gamma\left(-\frac{3}{2}+1\right)}{-\frac{3}{2}}=\frac{\Gamma\left(-\frac{1}{2}\right)}{-\frac{3}{2}}=\frac{-2\sqrt{\pi}}{-\frac{3}{2}}=\frac{4}{3}\sqrt{\pi}$$

وهكذا

ومن السهولة التأكد من أن

$$\Gamma(0)=\Gamma(-1)=\dots\dots\dots=\Gamma(-n)=\infty$$

حيث n عدد صحيح .

وترتبط دالة جاما بالعلاقات التالية

$$\Gamma(x)\,\Gamma(1-x)=\pi/\sin(\pi x)$$

$$\Gamma(x)\,\Gamma\left(x+\frac{1}{2}\right)=2^{1-2x}\sqrt{\pi}\,.\,\Gamma(2x)$$

ثانياً : دالة بيتا Beta Function :

تعرف هذه بالتكامل

$$B(p,q)=\int_0^1 x^{p-1}(1-x)^{q-1}dx\ ,(\operatorname{Re} p>0\ ,\ \operatorname{Re} q>0) \qquad (5)$$

وترتبط بالعلاقات التالية

$(i)\ B(p,q)=B(q,p)$

$(ii)\ B(p,q)=\Gamma(p)\,\Gamma(q)\,/\,\Gamma(p+q)$

$(iii)\ B(p,q)=B(p+1,q)+B(p,q+1)$

وإذا وضعنا $x=\sin^2\theta$ في (5) نحصل على

$$B(p,q)=2\int_0^{\pi/2}\sin^{2p-1}\theta\,\cos^{2q-1}d\,\theta$$

المراجع

المراجـــع

أولاً : المراجع الأجنبية :

(1) M.D. Raisinghania : Advanicd Differential Equations. S. Chand and Company Ltd, India 1991.

(2) E.D Rainville and P. Bedient : Elementary Diffierential Equations. Macmillan Pub. Co. New York, 1980.

(3) M. Rao: Ordinary Differential Equations John Wiley and Sons. N.Y 1989.

(4) S. Ross : Ordinary Differential Equations, John Wiley and Sons. N.Y 1990.

ثانياً : المراجع العربية :

(٥) المعادلات التفاضلية : ريتشارد برنسون (سلسلة شوم) الدار الدولية للاستثمارات الثقافية ، ترجمة د . حسن العويضي ، د . عبد الوهاب عباس (٢٠٠١) القاهرة .

(٦) نظريات المعادلات التفاضلية د . رحمة عبد الكريم ، مطبوعات جامعة الملك سعود ، ١٤٠٨هـ .

(٧) نظريات وسائل ، المعادلات التفاضلية (سلسلة شوم) فرانك أيرز ، الدار الدولية للاستثمارات الثقافية ، ١٩٩٧م .

(٨) المعادلات التفاضلية العادية ، الجزء الأول : د . حسن العويضي – د . عبد الوهاب عباس ، د . سناء علي زارع ، دار الرشد ، ٢٠٠٥ .